Vorlesungsskript

Grundgebiete der Elektrotechnik

Für Studierende der Bachelor-Studiengänge

- **Elektrotechnik Jülich ET**
- **Electrical Engineering ET-AOS**
- **Physikingenieurwesen PI-AOS**
- **Physical Engineering PI-AOS**
- **Wirtschaftsingenieurwesen WI**

Prof. Dr.-Ing. Alexander Kern

Fachhochschule Aachen
Campus Jülich

© FH Aachen, Prof. Dr.-Ing. Alexander Kern

01/2026

Grundgebiete der Elektrotechnik

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen 7
1.1 Physikalische Einheiten 7
1.2 Größengleichungen 8
1.3 Wesen der Elektrizität 9
1.3.1 Bohrsches Atom-Modell 10
1.3.2 Spannung und Strom 11
1.3.3 Zählpfeile für Ströme und Spannungen 13
1.4 Physikalische Felder 15
1.4.1 Allgemeine Feldbegriffe 15
1.4.2 Vektorfelder 15
2. Gleichstromkreis 18
2.1 Ohm’sches Gesetz 18
2.1.1 Spezifischer (elektrischer) Widerstand und Leitfähigkeit 19
2.1.2 Mechanisch beeinflussbare Widerstände 19
2.1.3 Temperaturabhängigkeit von Widerständen 20
2.1.4 Magnetisch beeinflussbare Widerstände 23
2.1.5 Optisch beeinflussbare Widerstände 23
2.1.6 Gültigkeitsbereich des Ohm‘schen Gesetzes, nichtlineare Widerstände 24
2.2 Ersatzschaltungen technischer Spannungs- und Stromquellen 25
2.2.1 Ideale Spannungsquellen 25
2.2.2 Ideale Stromquellen 25
2.2.3 Kennlinien für technische lineare elektrische Quellen 26
2.2.4 Spannungsquellen-Ersatzschaltung 29
2.2.5 Stromquellen-Ersatzschaltung 30
2.2.6 Äquivalenz zwischen Spannungs- und Stromquellen 30
2.3 Elektrische Leistung und Energie (Arbeit) 31
2.3.1 Berechnung von Leistung und Energie 31
2.3.2 Leistungsanpassung 32
2.3.3 Wirkungsgrad 34
2.3.4 Elektrowärme 35
2.4 Berechnung linearer Netzwerke 37
2.4.1 Parallelschaltung von Widerständen; Stromteiler 37
2.4.2 Reihenschaltung von Widerständen; Spannungsteiler 39
2.4.3 Kirchhoff’sche Regeln 41
2.4.4 Knoten- und Maschenanalyse 44
2.4.5 Überlagerungsverfahren (Superposition) 47
2.4.6 Verfahren der Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle 49
2.4.7 Maschenstromverfahren 51
2.4.8 Knotenpotenzialverfahren 53
2.4.9 Stern – Dreieck-Umwandlung 56
2.4.10 Vergleich der unterschiedlichen Netzwerkanalyse-Verfahren 58
2.5 Messung von Strom, Spannung, Widerstand und Leistung 59
2.5.1 Grundschaltungen 59

2.5.2 Messbereichserweiterungen ... 42
2.5.3 Kompensationsmessverfahren ... 61
2.5.4 Brückenschaltungen ... 62
2.6 Netzwerke mit nichtlinearen Bauelementen ... 63
2.6.1 Linearisierung ... 63
2.6.2 Graphische Arbeitspunktbestimmung ... 66
2.6.3 Stabilitätsbetrachtungen ... 68
3. Elektrostatisches Feld ... 70
3.1 Ladungen als Ursache des elektrischen Feldes ... 70
3.1.1 Wirkungen von Ladungen ... 70
3.1.2 Ladungserhaltung ... 72
3.2 Kräfte auf elektrische Ladungen, Coulomb‘sches Gesetz ... 73
3.2.1 Kräfte zwischen 2 Ladungen ... 73
3.2.2 Elektrostatisches Feld einer Punktladung ... 75
3.2.3 Elektrische Ladungen im elektrischen Feld, Elektrische Feldstärke ... 75
3.2.4 Superpositionsprinzip ... 77
3.2.5 Feldlinien und Feldlinienbilder ... 77
3.3 Idealisierte Ladungsverteilungen ... 79
3.3.1 Punktladung ... 79
3.3.2 Linienladung ... 79
3.3.3 Flächenladung ... 80
3.3.4 Raumladung ... 81
3.4 Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld ... 82
3.4.1 Arbeit, Potenzial, Spannung ... 82
3.4.2 Äquipotenzialflächen ... 85
3.5 Erregung des elektrostatischen Feldes ... 87
3.5.1 Allgemeines zum Fluss ... 87
3.5.2 Elektrischer Fluss ... 88
3.5.3 Elektrische Flussdichte ... 89
3.5.4 Permittivität ... 91
3.6 Kapazität ... 91
3.6.1 Definition ... 91
3.6.2 Methoden zur Kapazitätsberechnung ... 92
3.6.3 Plattenkondensator ... 94
3.6.4 Zylinderkondensator ... 95
3.6.5 Kugelkondensator ... 96
3.6.6 Kapazität einer Zwei-Draht-Leitung ... 96
3.6.7 Parallelschaltung von Kapazitäten ... 97
3.6.8 Reihenschaltung von Kapazitäten ... 98
3.6.9 Schlussbetrachtung ... 99
3.7 Energie und Kräfte im elektrischen Feld ... 100
3.7.1 Kondensatorenergie ... 100
3.7.2 Energiedichte ... 101
3.7.3 Kräfte zwischen zwei Elektroden ... 102
3.8 Bedingungen an Grenzflächen ... 103
3.9 Materie im elektrischen Feld ... 105
3.9.1 Feldstärke in Isolierstoffen ... 105
3.9.2 Influenz ... 108
3.9.3 Faraday‘scher Becherversuch ... 109
4. Elektrisches Strömungsfeld ... 111
4.1 Elektrische Stromdichte und Feldstärke ... 111

4.1.1 Stromlinien und Äquipotenzialflächen ... 111
4.1.2 Elektrische Stromdichte ... 112
4.1.3 Elektrische Feldstärke ... 113
4.2 Ohm‘sches Gesetz in Differenzialform ... 117
4.2.1 Verallgemeinerte Knotenregel ... 117
4.2.2 Verallgemeinerte Maschenregel ... 118
4.2.3 Ohm‘sches Gesetz ... 119
4.3 Technische Strömungsfelder, Widerstandsberechnungen ... 120
4.3.1 Methoden zur Widerstandsberechnung ... 120
4.3.2 Homogenes Feld ... 121
4.3.3 Zylinderfeld ... 122
4.3.4 Kugelfeld ... 123
4.3.5 Reihenschaltung von Widerständen ... 125
4.3.6 Parallelschaltung von Widerständen ... 125
4.3.7 Schlussbetrachtung ... 126
4.4 Bedingungen an Grenzflächen ... 128
4.5 Leistungsdichte und Joule‘sche Verlustleistung ... 130
5. Wechselstromkreis ... 132
5.1 Periodische Größen ... 132
5.1.1 Grundlagen ... 132
5.1.2 Definition einer Wechselgröße ... 133
5.1.3 Gleichrichtwert einer Wechselgröße ... 134
5.1.4 Effektivwert einer Wechselgröße ... 136
5.1.5 Formfaktor and Scheitelfaktor ... 139
5.1.6 Mischgrößen ... 140
5.1.7 Fourier-Zerlegung ... 141
5.2 Wechselspannungen an einfachen Zweipolen ... 147
5.3 Sinusförmige Spannungen und Ströme ... 150
5.3.1 Sinusförmige Wechselgröße ... 150
5.3.2 Frequenzbereiche technischer Wechselspannungen ... 151
5.3.3 Überlagerung sinusförmiger Spannungen und Ströme ... 152
5.4 Darstellungen sinusförmiger Spannungen und Ströme ... 153
5.4.1 Zeitlinienbild ... 153
5.4.2 Scheitelwertzeigerbild ... 154
5.4.3 Effektivwertzeigerbild ... 156
5.4.4 Differentiation und Integration sinusförmiger Schwingungsverläufe ... 157
5.4.5 Effektivwertzeigerbild in der Gauß’schen Zahlenebene ... 158
5.5 Berechnung von Wechselstromkreisen ... 161
5.5.1 Grundsätzliche Betrachtung ... 161
5.5.2 Komplexer Widerstand und komplexer Leitwert ... 162
5.5.3 Grundelemente *R*, *L* und *C* ... 164
5.5.4 *RL*-Reihenschaltung ... 167
5.5.5 *RC*-Reihenschaltung ... 168
5.5.6 *RC*-Parallelschaltung ... 169
5.5.7 *RL*-Parallelschaltung ... 170
5.5.8 Dualität ... 171
5.6 Beispiele für Wechselstromschaltungen ... 172
5.6.1 Spannungsteiler ... 172
5.6.2 Stromteiler ... 172
5.6.3 Brückenschaltung ... 173
5.6.4 Tiefpass ... 174

5.6.5 Hochpass ... 175
5.6.6 Reihenschwingkreis ... 176
5.6.7 Parallelschwingkreis ... 183
5.7 Leistung im Wechselstromkreis ... 185
5.7.1 Augenblicksleistung ... 185
5.7.2 Wirkleistung ... 185
5.7.3 Scheinleistung ... 186
5.7.4 Blindleistung ... 187
5.7.5 Komplexe Leistungsberechnung ... 187
5.7.6 Blindleistungskompensation ... 189
6. Ortskurven ... 192
6.1 Ortskurven von RL - und RC - Schaltungen ... 192
6.1.1 RL - Reihenschaltung ... 192
6.1.2 GC - Parallelschaltung ... 193
6.1.3 RC – Reihenschaltung ... 194
6.1.4 GL – Parallelschaltung ... 195
6.2 Inversion von Ortskurven ... 196
6.3 Ortskurven von Schwingkreisen ... 197
6.3.1 Reihenschwingkreis ... 197
6.3.2 Parallelschwingkreis ... 197
7. Dreiphasensysteme ... 198
7.1 Erzeugung von Dreiphasensystemen ... 198
7.2 Symmetrische Last ... 202
7.2.1 Sternschaltung ... 202
7.2.2 Dreieckschaltung ... 203
7.3 Unsymmetrische Last ... 204
7.3.1 Dreieckschaltung ... 204
7.3.2 Sternschaltung ... 205
7.4 Leistung im Dreiphasensystem ... 208
7.4.1 Wirk-, Blind- und Scheinleistung ... 208
7.4.2 Blindleistungskompensation ... 209
8. Schutz- und Sicherheitsmaßnahmen ... 211
8.1 Allgemeines ... 211
8.2 Wirkung des Stroms auf den menschlichen Körper ... 211
8.3 Schutzmaßnahmen ... 213
8.3.1 Schutzkleinspannung ... 213
8.3.2 Schutztrennung ... 213
8.3.3 Schutzisolierung ... 213
8.3.4 Schutzerdung ... 214
8.3.5 Fehlerstrom-Schutzschalter (FI – RCCB) ... 214
8.3.6 NOT-AUS-Taster ... 214
9. Zeitunabhängige Magnetfelder ... 215
9.1 Einführung/Erscheinungsformen des Magnetismus ... 215
9.1.1 Polarität und Feldlinien ... 215
9.1.2 Kraft auf eine bewegte elektrische Ladung ... 218
9.1.3 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter ... 219
9.1.4 Kraft zwischen zwei Leitern ... 221
9.1.5 Magnetische Flussdichte, Induktion ... 222
9.1.6 Magnetische Feldstärke ... 222
9.1.7 Permeabilität ... 223
9.1.8 Magnetische Flussdichte um lange, gerade Leiter ... 223

9.2 Durchflutungsgesetz ... 225
9.2.1 Durchflutungssatz (Ampere's Law) ... 225
9.2.2 Magnetisches Wirbelfeld ... 227
9.2.3 Magnetfeld des geraden Leiters ... 228
9.2.4 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Rohres ... 229
9.2.5 Magnetfeld der Ringspule ... 230
9.2.6 Magnetfeld der (langen) Zylinderspule ... 231
9.3 Gesetz von Biot-Savart ... 232
9.3.1 Magnetfeld bewegter Ladungen ... 232
9.3.2 Magnetfeld eines dünnen, geraden Leiters ... 233
9.3.3 Magnetfeld einer dünnen, kreisförmigen Leiterschleife ... 233
9.4 Materie im Magnetfeld / Magnetische Eigenschaften der Stoffe ... 234
9.4.1 Physikalische Eigenschaften ... 234
9.4.2 Dia- und paramagnetische Stoffe ... 235
9.4.3 Ferro- und ferrimagnetische Stoffe ... 236
9.4.4 Magnetisierungskennlinie ... 238
9.5 Magnetischer Kreis ... 240
9.5.1 Beispiele für Magnetkreise ... 240
9.5.2 Elektrische Durchflutung und magnetische Spannung ... 241
9.5.3 Magnetischer Fluss ... 241
9.5.4 Magnetfeld an Grenzflächen ... 242
9.5.5 Magnetischer Widerstand und magnetischer Leitwert ... 243
9.5.6 Magnetischer Kreis mit Luftspalt ... 246
9.5.7 Magnetkreise mit Permanentmagneten ... 247
10. Zeitveränderliche Magnetfelder ... 251
10.1 Induktionsgesetz (Faraday's Law) ... 251
10.1.1 Induktionsvorgang und Lenz´sche Regel ... 251
10.1.2 Berechnung der induzierten Spannung bei bewegtem Leiter ... 252
10.1.3 Ruhender Leiter im zeitvarianten Magnetfeld ... 255
10.1.4 Rotation einer Leiterschleife im Magnetfeld ... 256
10.2 Induktivität ... 257
10.2.1 Selbstinduktivität ... 257
10.2.2 Selbstinduktivität der langen Zylinderspule ... 259
10.2.3 Selbstinduktivität der langen Ringspule ohne Luftspalt ... 259
10.2.4 Selbstinduktivität der langen Ringspule mit Luftspalt ... 260
10.2.5 Selbstinduktivität der langen Doppelleitung ... 261
10.2.6 Gegeninduktivität ... 263
10.3 Energie des magnetischen Feldes ... 265
10.3.1 Energie der stromdurchflossenen Spule ... 265
10.3.2 Energiedichte ... 266
10.3.3 Kraft auf Magnetpolflächen ... 267
10.3.4 Hystereseverluste ... 268
10.4 Transformatoren und Übertrager ... 269
10.4.1 Idealer Transformator ... 270
10.4.2 Verlustloser Transformator ... 272
10.4.3 Transformator mit Kupferverlusten ... 273
10.4.4 Transformator mit Kupfer- und Eisenverlusten ... 275
11. Maxwell'sche Gleichungen ... 277
11.1 Durchflutungssatz ... 277
11.2 Induktionsgesetz ... 278
11.3 Gauß'scher Satz ... 278

11.4 Kontinuitätsgleichung 279
11.5 Magnetischer Fluss 279
11.6 Materialgleichungen 280
11.7 Zusammenfassung 280
12. Stromverdrängung, Skin-Effekt 281
12.1 Grundlagen 281
12.2 Örtliche und zeitliche Abhängigkeit von elektrischer Feldstärke 283
12.3 Praktische Bedeutung, Beispiele 285
12.3.1 Impedanz eines Leitungsstücks 285
12.3.2 Verluste bei ausgeprägtem Skin-Effekt 286
12.3.3 Eindringtiefe 287
12.3.4 Magnetfeldstärke 288

Literatur

[1] Frohne H.; Löcherer K.-H.; Müller H.; Harriehausen T.; Schwarzenau D.: Moeller Grundlagen der Elektrotechnik. Teubner-Verlag Stuttgart. 22. Auflage 2011. ISBN 978-3-8348-0898-1.

[2] Führer A.; Heidemann K.; Nerreter W.: Grundgebiete der Elektrotechnik – Band 1: Stationäre Vorgänge. Carl-Hanser-Verlag München-Wien. 8. Auflage 2006. ISBN 978-3-446-40668-1.

[3] Führer A.; Heidemann K.; Nerreter W.: Grundgebiete der Elektrotechnik – Band 2: Zeitabhängige Vorgänge. Carl-Hanser-Verlag München-Wien. 8. Auflage 2007. ISBN 978-3-446-40573-8.

[4] Marinescu M.: Elektrische und magnetische Felder – Eine praxisorientierte Einführung. Springer Verlag Heidelberg. 2. Auflage 2009. ISBN 978-3-540-89696-8.

[5] Schwab A.: Begriffswelt der Feldtheorie. Springer Verlag Berlin-Heidelberg. 7. Auflage 2013. ISBN 978-3-642-34565-4.

[6] Maxfield C. et al: Electrical engineering – know it all. Newnes. 1. Auflage. 2008. ISBN 978-1-85617-528-9.

[7] Grob, B.: Basic electronics. 8th edition 1997, Glencoe/McGraw-Hill. ISBN 0-02-802253-X.

[8] Rizzioni, G.: Principles and applications of electrical engineering. 3rd edition 2000, McGraw-Hill. ISBN 0-07-117727-2.

(aus der genannten Literatur wurden im Skript einige Abbildungen verwendet)

1. Grundlagen

1.1 Physikalische Einheiten

Nach der Norm DIN 1301 sollten im ingenieur- und naturwissenschaftlichen Bereich ausschließlich die **SI-Einheiten** verwendet werden. Das erleichtert das gegenseitige Verständnis auch über Sprachgrenzen hinweg.

(SI = Systeme International d' Unites)

Alle SI-Einheiten können aus den 7 SI-Basiseinheiten abgeleitet werden:

Physikalische Größe	**Name der SI-Basiseinheit**	**Symbol der SI-Basiseinheit**
Länge *l*	Meter	m
Masse *m*	Kilogramm	kg
Zeit *t*	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke *I*	Ampere	A
(Thermodynamische) Temperatur *T*, ϑ	Kelvin	K [1)]
Substanz *N*	Mol	mol
Lichtintensität *J*	Candela	cd

[1)] 0°C=273,15K; für Temperaturen [ΔT]=K; immer !!!

Beispiele weiterer SI-Einheiten:

Einheit der Kraft: Newton $1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$

Einheit der Energie (Arbeit): Joule $1\,J = 1\,N \cdot m = 1\,W \cdot s = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

Einheit der Spannung: Volt $1\,W \cdot s = 1\,V \cdot A \cdot s \rightarrow$

$$1\,V = 1\,\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$$

Einheiten, die nicht zum System der SI-Einheiten gehören, sind z.B.:

kp = 9.81 N cal = 4.187 J PS = 0.735 kW hp = 0.740 kW Torr = 1.33 hPa

Neben den SI-Einheiten sind noch folgende Einheiten gebräuchlich:

1 min = 60 s $1° = \frac{\pi}{180} rad$

1 h = 3 600 s

1 d = 86 400 s 1 bar = 10^5 Pa

1 l = 10^{-3} m^3 1 eV = 0,1602*10^{-18} J

1 t = 10^3 kg 1 var = 1 VA

Dezimalzahlen

In den Ingenieur- und Naturwissenschaften sind dezimale Vielfache und dezimale Teile der Grundeinheiten gebräuchlich.

Ausnahme: Vielfache der Zeiteinheit Sekunde

1 d = 24 h 1 h = 60 min 1 min = 60 s

Vielfaches	Name	Symbol	Teiler	Name	Symbol
10^{24}	Yotta	Y	10^{-1}	dezi	d
10^{21}	Zetta	Z	10^{-2}	Zenti	c
10^{18}	Exa	E	10^{-3}	Milli	m
10^{15}	Peta	P	10^{-6}	Micro	µ
10^{12}	Tera	T	10^{-9}	Nano	n
10^{9}	Giga	G	10^{-12}	Pico	p
10^{6}	Mega	M	10^{-15}	Femto	f
10^{3}	Kilo	k	10^{-18}	Atto	a
10^{2}	Hekto	h	10^{-21}	Zepto	z
10^{1}	Deka	da	10^{-24}	Yokto	y

Anmerkungen: Deutsch: 1 Milliarde = Englisch: 1 billion
Bitte beachten Sie auch die unterschiedliche Schreibweise 1.200 und 1,200 in „deutschen“ und „englischen“ Gleichungen!

1.2 Größengleichungen

Eine physikalische Größe ist das Produkt aus Zahl und Einheit.

Beispiel: Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\frac{m}{s^2} \quad (g \neq 9{,}81)$

Größengleichungen enthalten immer physikalische Größen gemäß der obigen Definition.

Beispiel einer Größengleichung:

$$P = \omega \cdot M$$

ω = Kreisfrequenz, z.B. $\omega = 100\frac{1}{s} = 100\frac{rad}{s} = 0{,}1\frac{rad}{ms} = \frac{5{,}73°}{ms}$

M = Drehmoment z.B. M = 10 Nm

P = Leistung $P = 100\,\frac{1}{s} \cdot 10\,Nm = 1\,000\,\frac{Nm}{s} = 1\,000\,\frac{Ws}{s} = 1kW$

Es ist häufig sinnvoll, die einzelnen Größen einer Größengleichung in ganz bestimmten Einheiten anzugeben (z.B. zur Auswertung von Messreihen, zur Anfertigung von Tabellen, zur graphischen Darstellung).

Aus der Größengleichung wird dann die bezogene Größengleichung.

Beispiel: Ziel ist eine Gleichung, die die Leistung in kW als Funktion der Drehzahl in min^{-1} und des Drehmoments in Nm angibt.

$P = \omega \cdot M$ Es ist für eine Rotationsbewegung unüblich, die Winkelgeschwindigkeit ω anzugeben.

$\omega = 2\pi \cdot n$ Meistens wird in der Technik die Drehzahl in Umdrehungen pro Minute (min^{-1}) angegeben.

$P = 2\pi \cdot n \cdot M$ $\leftarrow$ allgemeingültige Beziehung

Jede physikalische Größe wird durch die vorgesehene Einheit dividiert. Natürlich muss die Gleichung nach wie vor korrekt bleiben!

$$\frac{P}{kW} = 2\pi \cdot \frac{n}{\min^{-1}} \cdot \frac{M}{Nm} \cdot \frac{1}{kW} \cdot \min^{-1} \cdot Nm$$

$$\frac{P}{kW} = 2\pi \cdot \frac{Nm}{1000W \cdot \min} \cdot \frac{n}{\min^{-1}} \cdot \frac{M}{Nm}$$

Dimensionslose Größen

$$\frac{P}{kW} = 2\pi \cdot \frac{Ws}{1000W \cdot 60\,s} \cdot \frac{n}{\min^{-1}} \cdot \frac{M}{Nm}$$

$$\frac{P}{kW} = 0{,}1047 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{n}{\min^{-1}} \cdot \frac{M}{Nm}$$

z.B.: n = 3000 min^{-1}; M = 10 Nm

$$\frac{P}{kW} = 0{,}1047 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3\,000\ \min^{-1}}{\min^{-1}} \cdot \frac{10\ Nm}{Nm} = 3{,}141 \qquad \rightarrow$$

$$\underline{P = 3{,}141\,kW}$$

1.3 Wesen der Elektrizität

Beschreibung eines bekannten Phänomens (siehe auch Kap. 2.1):
“Reibt man zwei Bernstein-Stäbe aneinander, stoßen sie sich ab. Gleiches passiert mit zwei Glas-Stäben. Nimmt man jedoch einen Bernstein- und einen Glas-Stab und reibt sie aneinander, ziehen sie sich an.“

- Schluss daraus: Es gibt offensichtlich zwei verschiedene Arten von elektrischen Ladungen.

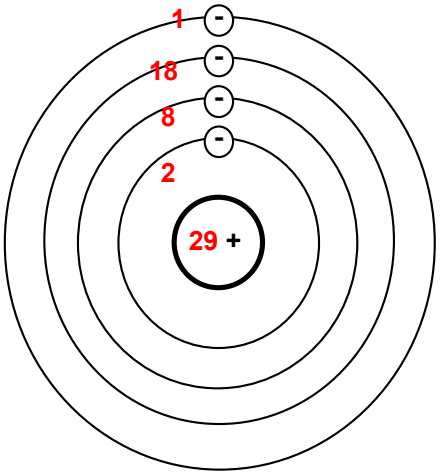
- Bernstein heißt im Griechischen “το ηλεκτρον“, daraus wurde das Wort „Elektrizität“ abgeleitet.

- Die Polarität wurde dadurch festgelegt, dass das Glas als positiv geladen und der Bernstein als negativ geladen definiert wurde (Chr. Lichtenberg, 1777).

1.3.1 Bohrsches Atom-Modell

(Niels Bohr, 1913)

Beispiel: Kupfer



Im Atomkern:

Protonen: 29
Neutronen: 34 (Cu 63)
36 (Cu 65)
Isotope

(Relative Atommasse: 63,54)

Auf den Elektronenbahnen:

29 Elektronen

Vergleich der Größenordnungen:

∅ Atom	$\approx 10^{-10}$ m	∅ Pluto-Umlaufbahn	$12*10^{9}$ km
∅ Atomkern	$\approx 10^{-15}$ m	∅ Erd-Umlaufbahn	$300*10^{6}$ km
(geschätzte Werte)		∅ Sonne	$1{,}4*10^{6}$ km

	Masse	Ladung
Proton	$1{,}672*10^{-27}$ kg	+ $0{,}1602*10^{-18}$ As
Neutron	$1{,}675*10^{-27}$ kg	± 0
Elektron	$0{,}911*10^{-30}$ kg	- $0{,}1602*10^{-18}$ As

$$\frac{m_+}{m_-} = 1835$$

Vergleich: $\frac{Masse\ der\ Sonne}{Masse\ der\ Erde} = 330000$ $\frac{Masse\ der\ Sonne}{Masse\ aller\ Planeten} = 743$

Der Kern ist positiv, die Elektronen negativ geladen: Das ist ein Ergebnis der Polaritäts-Definition aus dem Jahr 1777

Der Atomaufbau zeigt, ob ein Material gute oder schlechte elektrische Leitfähigkeit besitzt.

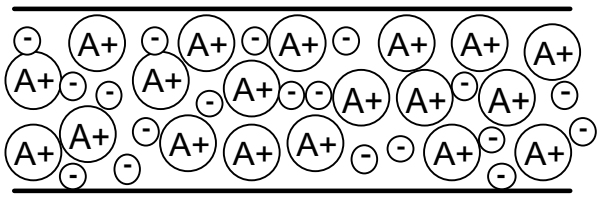
Beispiel: Kupfer:

Auf das äußerste Elektron (das 29-te) wirkt nur eine sehr geringe Anziehungskraft. Dies liegt zum einen an der rel. großen Entfernung zum Atomkern und zum anderen

daran, dass der 29-fach positiv geladene Atomkern elektrisch nahezu vollständig durch die 28 Elektronen auf den K-, L- und M- Elektronenschalen kompensiert wird. Dadurch kann sich das äußerste Elektron sehr einfach vom Atomkern weg bewegen:

→ **Leitungselektron, freies Elektron**

1.3.2 Spannung und Strom



In einem Kupferdraht sind die einzelnen Leitungselektronen nicht mehr einzelnen Atomkernen zugeordnet. Sie können sich rel. frei zwischen den Atomkernen (oder besser: den positiven Ionen) bewegen, etwa so wie eine Flüssigkeit oder ein Gas in einem porösen Material.

⇒ „Elektronen-Gas"

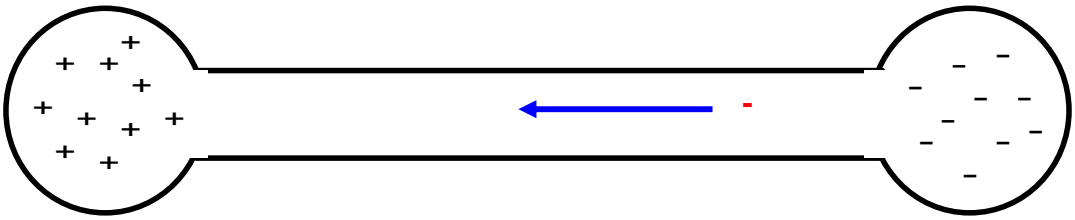
Metallische Leitung:

Normaler Zustand: Chaotische Bewegung der Leitungselektronen ohne Vorzugsrichtung

Im Falle eines Stromflusses: Jetzt ist eine Driftbewegung in eine Vorzugsrichtung überlagert

Fluss eines elektrischen Stroms = Transport von elektrischer Ladung

Grund für die Driftbewegung:

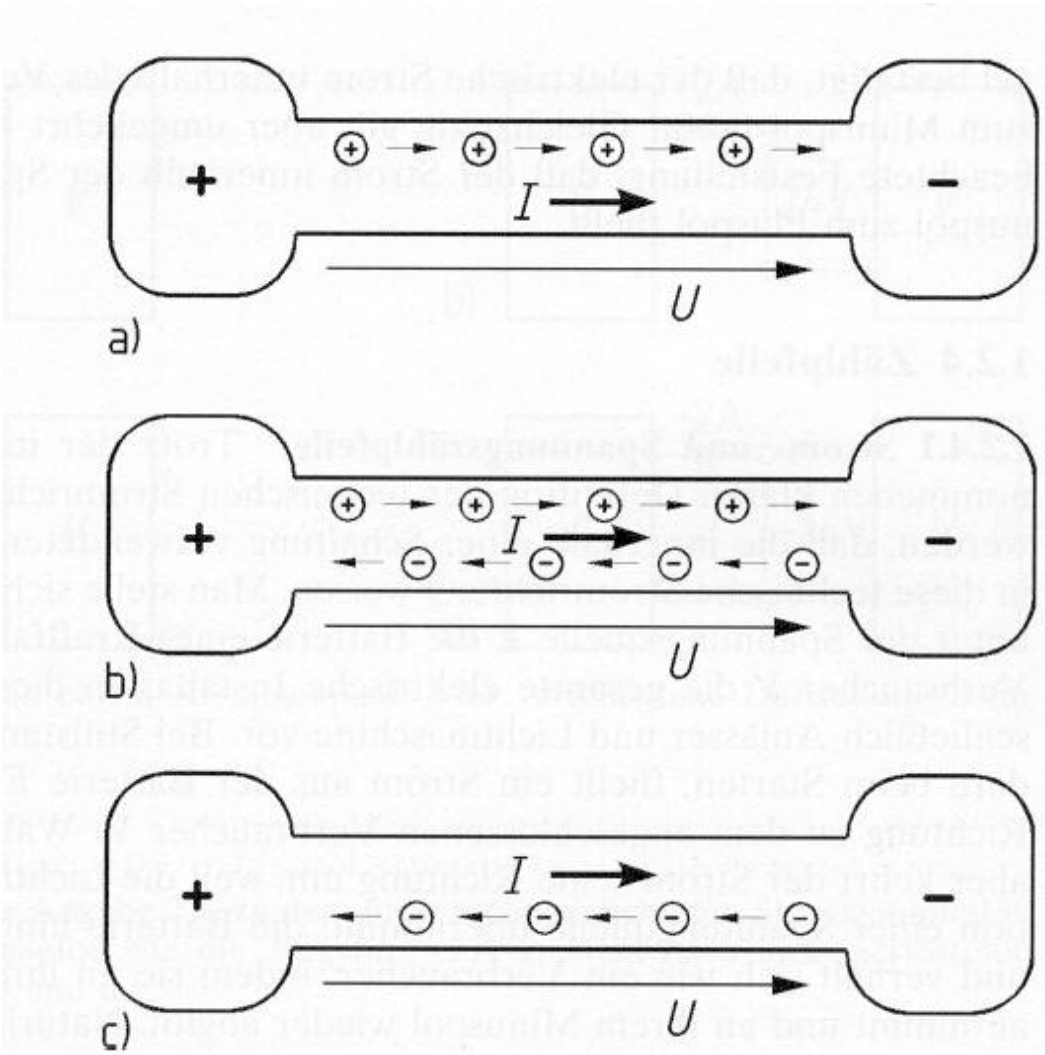


Bereich mit einem Mangel an Elektronen (wenig Elektronen)

Bereich mit einem Überschuss an Elektronen (viele Elektronen)

In der Vergangenheit wurde dieser Stromfluss als "physikalische Stromrichtung" bezeichnet. Das ist heute nicht mehr üblich. Die Stromflussrichtung ist von **+** nach **–** festgelegt (dies wurde früher als "technische Stromrichtung" bezeichnet).

Sinnvolles Modell dafür: positive Ladung bewegt sich von **+** nach **–**. Wie man sieht, führen alle drei, nachstehend gezeigten Fälle zum gleichen Ergebnis [1].



Hohes Potenzial Niedriges Potenzial

Für die metallische Leitung ist diese Vorstellung nicht absolut korrekt; sie liefert aber richtige Ergebnisse. Es ist in einem elektrischen Stromkreis offensichtlich egal, ob man annimmt, dass negative Ladungen sich von links nach rechts bewegen (z.B. im Uhrzeiger-Sinn), oder dass positive Ladungen sich von rechts nach links bewegen (z.B. entgegen Uhrzeiger-Sinn).

Vergleich: Abnahme von Hitze = Zunahme von Kälte

Elektrische Stromstärke = Elektrische Ladung, transportiert pro Zeiteinheit

Stromstärke	I	Einheit [I] = A [Ampere]
Potenzial	φ	Einheit [φ] = V [Volt]
Spannung	U	Einheit [U] = V

Dieser Prozess ist vergleichbar mit dem Austausch einer Flüssigkeit oder eines Gases zwischen zwei Tanks, die verschiedene Drücke aufweisen, durch eine Rohrleitung:

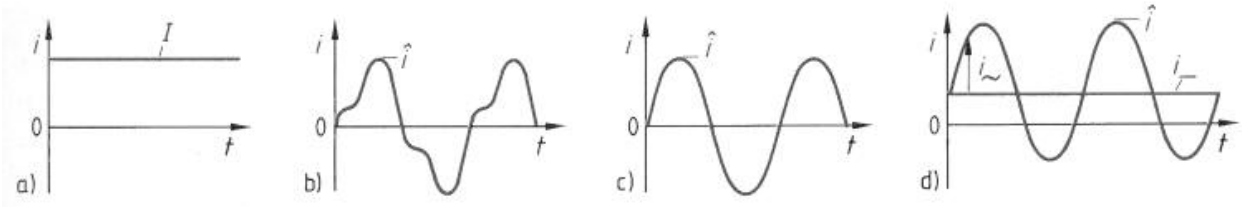
Durchflussmenge	$\Delta V/\Delta t$	Einheit $[\Delta V/\Delta t]$ =	m^3/s	$\approx I$
Druck	p	Einheit $[p]$ =	Pa	$\approx \varphi$
Druckdifferenz	Δp	Einheit $[\Delta p]$ =	Pa	$\approx U$

Arten von Elektrizität

Es ist üblich, die Arten von Elektrizitätsströmungen wie folgt zu klassifizieren:

- Gleichstrom – **DC** (direct current), mit konstanter, nicht-wechselnder Stromflussrichtung.
- Wechselstrom – **AC** (alternating current) mit wechselnder Stromflussrichtung.

Natürlich sind auch noch weitere Kombinationen möglich (siehe Beispiele) [1]

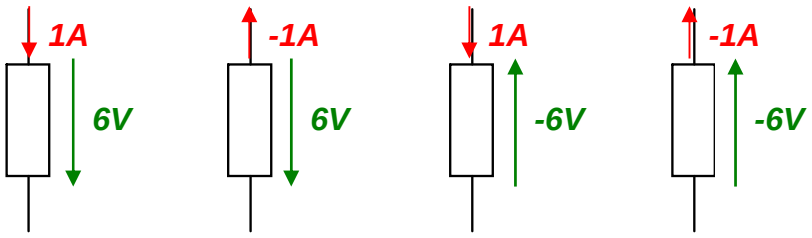


a) Gleichstrom I
b) allgemeiner periodischer Wechselstrom i mit Scheitelwert $\hat{\imath}$
c) sinusförmiger Wechselstrom i mit Scheitelwert $\hat{\imath}$
d) "´gemischter" Strom: Gleichstrom i_- mit überlagertem sinusförmigen Wechselstrom $i_\sim$

1.3.3 Zählpfeile für Ströme und Spannungen

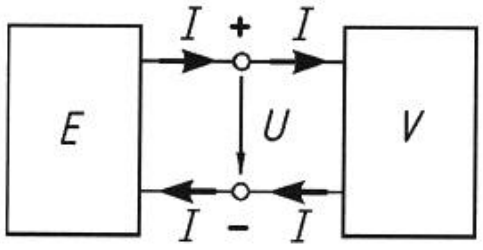
Die Größe, die neben dem Spannungs-Zählpfeil steht, gibt an, um wie viel das Potenzial am Ende des Zählpfeils höher ist als an seiner Spitze.

Die Größe, die neben dem Strom-Zählpfeil steht, gibt an, wie viel positive Ladung in Richtung des Zählpfeils pro Zeit transportiert wird.

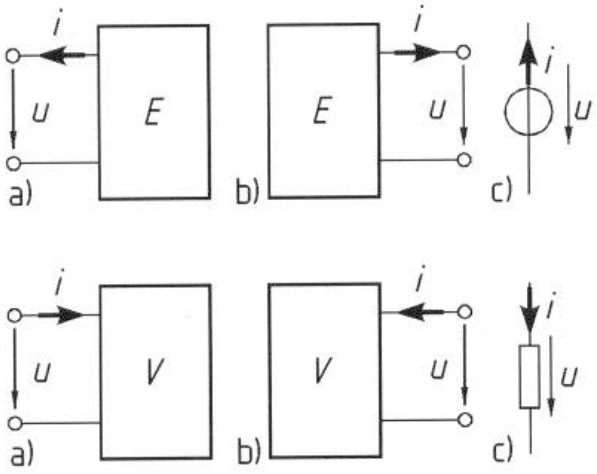


Vier unterschiedliche Darstellungen desselben Sachverhalts

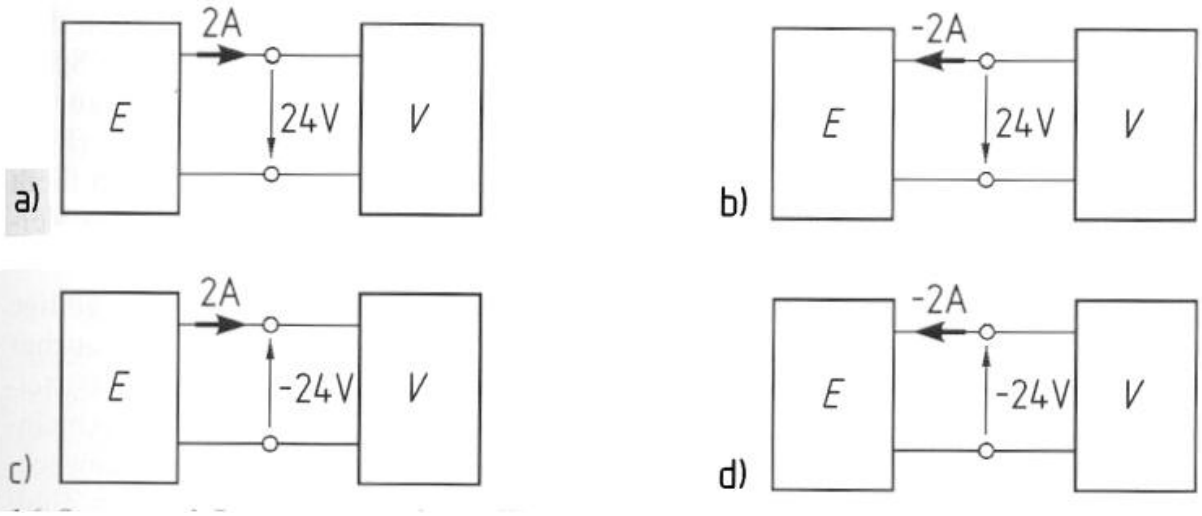
Im Falle eines geschlossenen elektrischen Stromkreises, bestehend aus einem Erzeuger (Quelle, Generator, E) und einem Verbraucher (Last, V), haben Spannung und Strom die nebenstehend dargestellten Richtungen, wenn das sogenannte Verbraucher-Zählpfeilsystem verwendet wird [1].



Damit wird festgelegt, dass im Falle eines Bauelements, das physikalische Leistung verbraucht, Spannung und Strom dieselbe Richtung aufweisen (also ist die Leistung positiv). Dann haben natürlich Spannung und Strom im Falle eines Erzeugers von elektrischer Energie verschiedene Richtungen (also ist die Leistung negativ).



Für einen geschlossenen elektrischen Stromkreis mit Erzeuger (Quelle, E) und Verbraucher (Last, V) kann derselbe Sachverhalt damit wieder mit vier unterschiedlichen Darstellungen gezeigt werden:



1.4 Physikalische Felder

1.4.1 Allgemeine Feldbegriffe

Obwohl im Rahmen dieser Vorlesung nur stationäre elektrische Felder behandelt werden, sollen hier dennoch für die allgemeine Darstellung zeitveränderliche physikalische Felder kurz vorgestellt werden.

Feldgröße:
Physikalische Größe, die in jedem Punkt eines Raumes einen eindeutigen, bestimmten Wert annimmt.

Feld:
Gesamtheit aller auftretenden Werte einer Feldgröße innerhalb des Raumes. Das physikalische Feld beschreibt also einen bestimmten physikalischen Zustand eines Raumes. Der Raum selbst ist „Träger“ dieses Feldes.

Skalarfeld:
Die Feldgröße ist eine skalare (ungerichtete) Größe.

Beispiele: $T(x,y)$ Temperatur
$\varphi(x,y)$ Potenzial
$H(x,y)$ Höhenlinien eines Berges

Vektorfeld:
Die Feldgröße ist eine vektorielle (gerichtete) Größe

Beispiele: $\vec{v}(x,y)$ Geschwindigkeit
$\vec{J}(x,y)$ Stromdichte

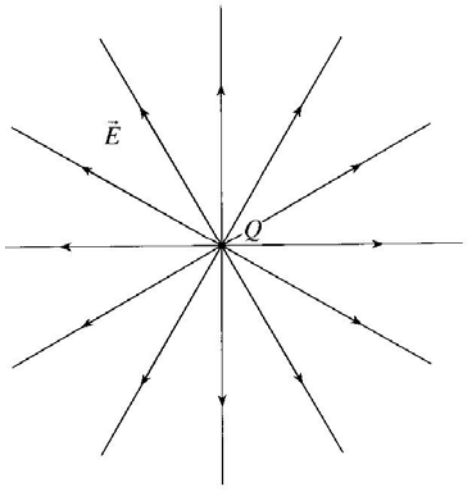
Beachte: Strom I bzw. Spannung U sind keine Feldgrößen, da sie nicht einem Raumpunkt zugeordnet werden können. Das Potenzial φ dagegen ist eine Feldgröße.

1.4.2 Vektorfelder

Da jedem Raumpunkt ein Vektor zugeordnet ist, muss eine Auswahl für die Darstellung getroffen werden, z.B. äquidistantes Gitter.

Feldlinien: Raumkurven (Linien), die in jedem Raumpunkt tangential zum zugehörigen Feldvektor verlaufen.

Beispiel: Feldlinien einer Punktladung



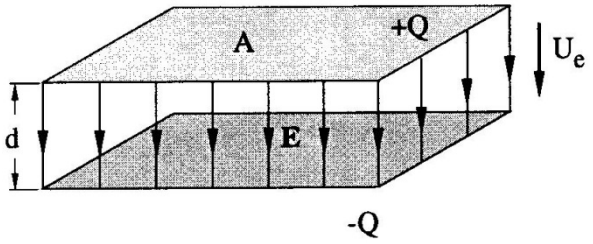
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Die Feldlinien gehen strahlenförmig vom Ursprung weg

Homogene und inhomogene Felder

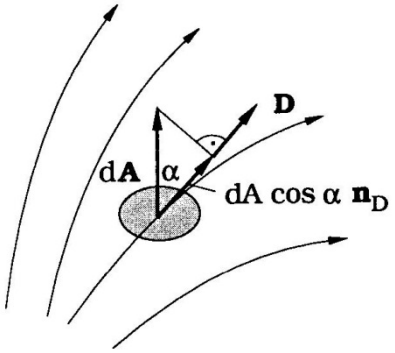
Physikalische Felder lassen sich hinsichtlich ihrer räumlichen Verteilung unterscheiden [5].

Homogene Felder
Betrag und Richtung sind unabhängig vom Ort



Beispiel: Elektrisches Feld eines Plattenkondensators

Inhomogene Felder
Betrag und/oder Richtung sind abhängig vom Ort



Beispiel: Elektrische Flussdichte

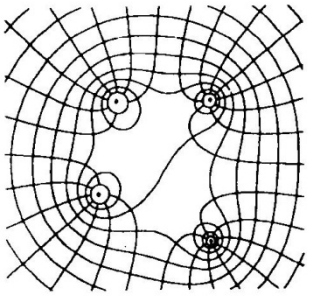
Grundsätzliche Arten von Vektorfeldern

Feldlinien können in sich geschlossen sein („Wirbel“) oder sie können in bestimmten Punkten anfangen („Quellen“) und in anderen Punkten enden („Senken“). Alle Vektorfelder lassen sich auch als Überlagerung von Quellenfeldern und Wirbelfeldern auffassen.

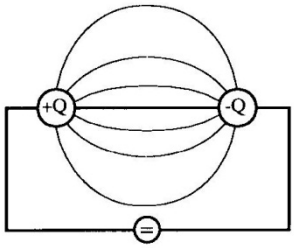
Reine **Quellenfelder** sind wirbelfreie Felder, d.h.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

C: beliebige geschlossene Linienkurve



a)



b)

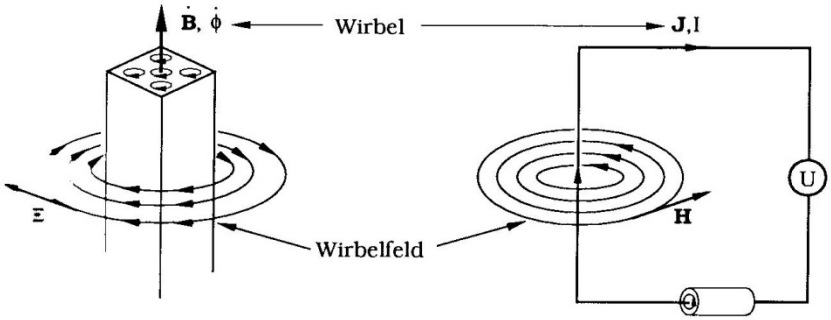
Beispiele: Elektrische Felder

a) Raumladungsfeld (4 Ladungen) ohne Randbedingungen
b) Zwei Elektroden mit unterschiedlicher Ladung

Reine **Wirbelfelder** sind quellenfreie Felder, d.h.

$$\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0$$

A: beliebige geschlossene Hüllfläche



a) b)

Beispiele:

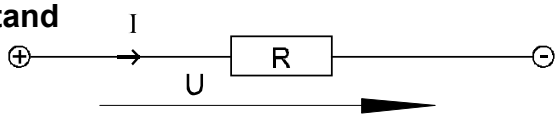
a) Elektrisches Wirbelfeld bei zeitlich veränderlichem magnetischem Feld (Induktion);
b) Magnetisches Wirbelfeld um einen stromdurchflossenen Leiter.

2. Gleichstromkreis

2.1 Ohm'sches Gesetz

Die Elektronen müssen sich durch die Atome des Leitermaterials hindurcharbeiten (ebenso die Ionen durch den Elektrolyten), müssen also einen gewissen Widerstand überwinden. Ihre Geschwindigkeit ist daher auch sehr gering (i. A. < 1mm/s)

Physikalische Größe: **elektrischer Widerstand**



$I \sim U$ für R = konst.

$I \sim \frac{1}{R}$ für U = konst.

$I \sim \frac{U}{R}$

Durch zweckmäßige Wahl der Maßeinheit für den elektrischen Widerstand wird der Proportionalitätsfaktor zu 1.

$$\boxed{I = \frac{U}{R}} \qquad \boxed{U = R \cdot I} \qquad \boxed{R = \frac{U}{I}}$$

Einheit: $[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega \ (Ohm)$

Der Ohm'sche Widerstand gibt an, wie **schlecht** der Strom durch einen Zweipol hindurchfließt. Wie **gut** dieser Strom durch einen Zweipol fließt, beschreibt die physikalische Größe: **elektrischer Leitwert**.

$$\boxed{I = G \cdot U} \qquad \boxed{U = \frac{I}{G}} \qquad \boxed{G = \frac{I}{U}}$$

Einheit: $[G] = \frac{[I]}{[U]} = \frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega} = S \ (Siemens) = MHO$

$$\boxed{G = \frac{1}{R}}$$

Das Ohm'sche Gesetz im engeren Sinne besagt, dass Strom und Spannung zueinander proportional sind.

$I \sim U$ $\qquad R \neq f(U, I)$ $\qquad G \neq f(U, I)$

2.1.1 Spezifischer (elektrischer) Widerstand und Leitfähigkeit

Widerstand bzw. Leitwert eines langen, geraden Leiters ergeben sich zu:

$$R \sim \frac{l}{A} \qquad G \sim \frac{A}{l}$$

und materialabhängig

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R &= \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{l}{\kappa \cdot A} \\ G &= \kappa \cdot \frac{A}{l} = \frac{A}{\rho \cdot l} \end{aligned}}$$

ρ = spezifischer (elektrischer) Widerstand $\qquad$ κ = (elektrische) Leitfähigkeit

Einheit $[\rho] = \Omega \cdot m = 10^6 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ $\qquad$ Einheit $[\kappa] = \frac{S}{m} = 10^{-6} \frac{Sm}{mm^2}$

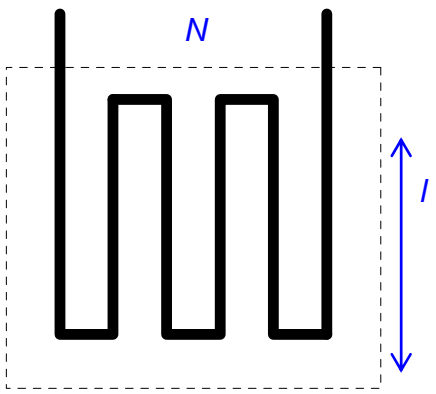
	$\frac{\rho}{\frac{\Omega mm^2}{m}}$	$\frac{\rho}{\Omega m}$	$\frac{\kappa}{\frac{Sm}{mm^2}}$	$\frac{\kappa}{\frac{S}{m}}$
Cu	0,018	$18 \cdot 10^{-9}$	56	$56 \cdot 10^6$
Al	0,029	$29 \cdot 10^{-9}$	35	$35 \cdot 10^6$
Ag	0,016	$16 \cdot 10^{-9}$	62,5	$62{,}5 \cdot 10^6$
Manganin	0,42	$420 \cdot 10^{-9}$	2,4	$2{,}4 \cdot 10^6$

2.1.2 Mechanisch beeinflussbare Widerstände

Wegen $R = \rho \cdot l/A$ können Verformungen Einfluss auf den Widerstandswert haben:

- ohne merklichen Einfluss: Biegung eines dünnen Drahts
- mit merklichem Einfluss: Quetschung, Stauchung, Dehnung (Änderung von *l* oder *A*)

Technische Anwendung: Dehnungsmessstreifen (DMS)



Widerstandsdraht ist schleifenförmig oder zickzackförmig auf einem Kunststoffstreifen aufgebracht.

Dieser DMS wird dann auf einem Prüfstück aufgeklebt und gibt durch seine Widerstandsänderung Aufschluss über die Quetschung, Stauchung, Dehnung.

ungedehnt: $R = \rho \cdot \frac{l_1}{A_1}$

Drahtlänge: $l_1 = N \cdot l$

Drahtvolumen: $V = l_1 \cdot A_1 = N \cdot l \cdot A_1$

gedehnt: $R + \Delta R = \rho \cdot \frac{l_2}{A_2}$

Drahtlänge: $l_2 = N \cdot (l + \Delta l)$

Drahtvolumen: $V = l_2 \cdot A_2 = N \cdot (l + \Delta l) \cdot A_2$

Unter der Annahme, dass das Drahtvolumen konstant bleibt*:

$$V = N \cdot l \cdot A_1 = N \cdot (l + \Delta l) \cdot A_2 \;\Rightarrow\; A_2 = \frac{l}{l + \Delta l} \cdot A_1$$

* Anmerkung: Das ist lediglich eine grobe Annahme; eine exakte Berechnung ist möglich mit der Poisson-Zahl μ: $\frac{\Delta r}{r} = \mu \cdot \frac{\Delta l}{l}$, wobei r der Radius ist.
Für Kupfer z.B. ist μ = 0,35. Für ein konstantes Volumen wäre μ = 0,5 erforderlich.

$$R + \Delta R = \rho \cdot \frac{l_2}{A_2} = \rho \cdot \frac{N \cdot (l + \Delta l)}{\frac{l}{l + \Delta l} \cdot A_1} = \rho \cdot \frac{N \cdot (l + \Delta l)^2}{l \cdot A_1}$$

$$R + \Delta R = \rho \cdot \frac{N \cdot (l^2 + 2 \cdot l \cdot \Delta l + \Delta l^2)}{l \cdot A_1} \approx \rho \cdot \frac{N \cdot (l + 2 \cdot \Delta l)}{A_1}$$

$$R + \Delta R \approx \rho \cdot \frac{N \cdot l}{A_1} + \rho \cdot \frac{2 \cdot N \cdot \Delta l}{A_1}$$

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\rho \cdot \frac{2 \cdot N \cdot \Delta l}{A_1}}{\rho \cdot \frac{N \cdot l}{A_1}} = \frac{2 \cdot \Delta l}{l}$$

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \frac{\Delta l}{l}}$$

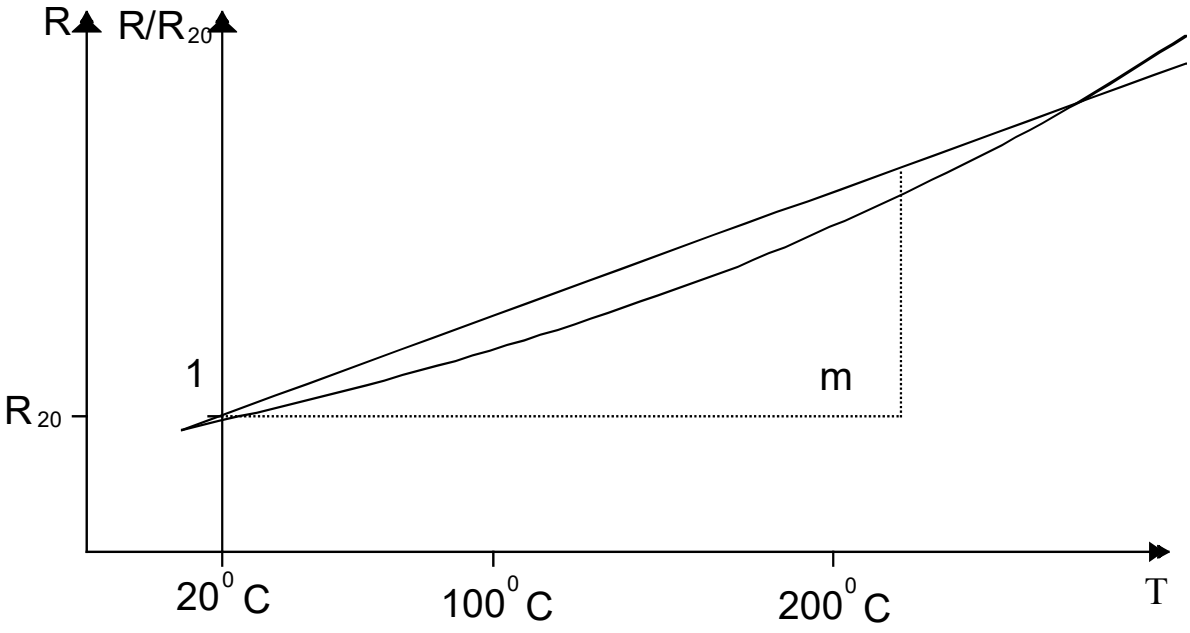
In der Praxis weicht der Faktor *k* mehr oder weniger stark vom Wert 2 ab ⇒ Kalibrierung !

2.1.3 Temperaturabhängigkeit von Widerständen

Metallener Leiter: Leitungselektronen werden durch die mit wachsender Temperatur stärker werdenden Gitterschwingungen zunehmend behindert.
→ **zu**nehmender Widerstand bei **zu**nehmender Temperatur
→ positiver Temperaturkoeffizient

Halbleiter: Ladungsträger werden wie beim metallenen Leiter durch die Gitterschwingungen zunehmend behindert.
Aber durch die Energiezufuhr bei Erwärmung werden zusätzliche Elektronen befähigt, ihren Atomverband zu verlassen (Valenzband → Leitungsband). Dadurch vermehren sich die Ladungsträger und es steigt die Leitfähigkeit. Dieser zweite Effekt dominiert.
→ **ab**nehmender Widerstand bei **zu**nehmender Temperatur
→ negativer Temperaturkoeffizient

Die Beziehung *R(T)* ist nichtlinear, aber abschnittsweise ist eine Linearisierung möglich.



$$\frac{R}{R_{20}} = 1 + m \cdot \Delta T$$

Steigung $m = \alpha_{20}$ = Temperaturkoeffizient

$$\Delta T = T - 20°C$$

$$\boxed{R = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta T)}$$

Linearisierung in der Umgebung von 20°C (deshalb die Bezeichnung α_{20}), im Normalfall hinreichend genau bis etwa 200°C.

Soll die Beschreibung für einen größeren Temperaturbereich brauchbar sein, oder soll sie besonders präzise sein, muss die Krümmung der Kennlinie *R*(*T*) berücksichtigt werden:

$$\boxed{R = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta T + \beta_{20} \cdot \Delta T^2)}$$

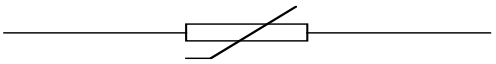
Näherung durch eine Parabel

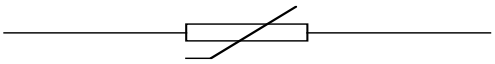
Zahlenwerte:

	$\frac{\alpha_{20}}{10^{-3}K^{-1}}$	$\frac{\beta_{20}}{10^{-6}K^{-2}}$
Silber	3,8	0,7
Kupfer	3,9	0,6
Aluminium	3,8	1,3
Magnesium	0,04	
Konstantan	-0,004	
Grafit	-1,3	

Konstantan: 53% Cu, 45% Ni, Mn, Al, Si (benutzt z.B. für Strom-Messwiderstände)

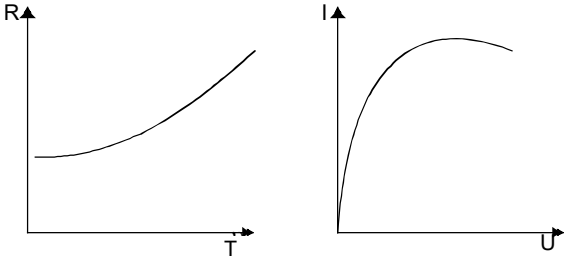
Widerstände mit besonders ausgeprägter Temperaturabhängigkeit:

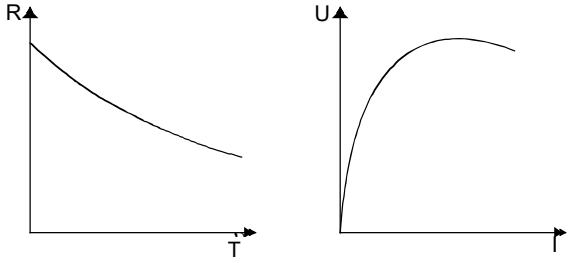




PTC – Widerstand / Kaltleiter
(positiver Temperaturkoeffizient)

NTC – resistance / Heißleiter
(negativer Temperaturkoeffizient)

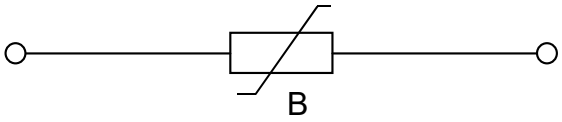




Diese Kennlinien sind nicht isotherm. Sie beziehen sich auf die jeweils im stationären (sich nicht mehr verändernden) Zustand erreichte Betriebstemperatur.
(Beachten Sie bitte auch die jeweils vertauschten Achsen bei den I-U-Diagrammen)

2.1.4 Magnetisch beeinflussbare Widerstände

Für einige leitfähige Werkstoffe (Beispiel: Bismut) und für Halbleiter ist der Widerstand abhängig vom Magnetfeld.



Technische Anwendung: Feldsonden

Elektrische Ladungsträger werden durch das Magnetfeld abgelenkt (siehe GET3) → Umweg → Zunahme der Weglänge → Zunahme des elektrischen Widerstands

Empirisch (experimentell) ermittelte Beziehung: $\boxed{R = R_0 \cdot (1 + k \cdot B^2)}$

B: Magnetische Flussdichte

2.1.5 Optisch beeinflussbare Widerstände

Innerer Fotoeffekt:
Zunächst fest an den Kern gebundene Elektronen nehmen die Energie eines Lichtquants auf und bekommen so eine höhere kinetische Energie. Sie können sich nun leicht vom Kern lösen und stehen als Leitungselektronen zur Verfügung.

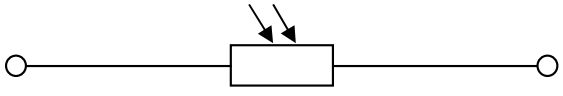
Lichteinstrahlung → Vermehrung der elektrischen Ladungsträger (Elektronen)
→ Verringerung des elektrischen Widerstands

Unterschiede in der spektralen Empfindlichkeit:

- Maximum im sichtbaren Bereich (0,38 μm ... 0,78 μm): Kadmiumsulfid (CdS), Selen (Se)

- Maximum im nahen Infrarot: Silizium (Si): 1,1 μm
  Germanium (Ge): 1,7 μm
  Bleisulfid (PbS): 2,8 μm

Fotowiderstände:



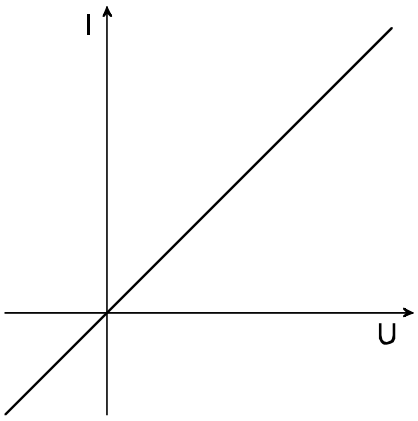
Material meist CdS, auch Se

2.1.6 Gültigkeitsbereich des Ohm‘schen Gesetzes, nichtlineare Widerstände

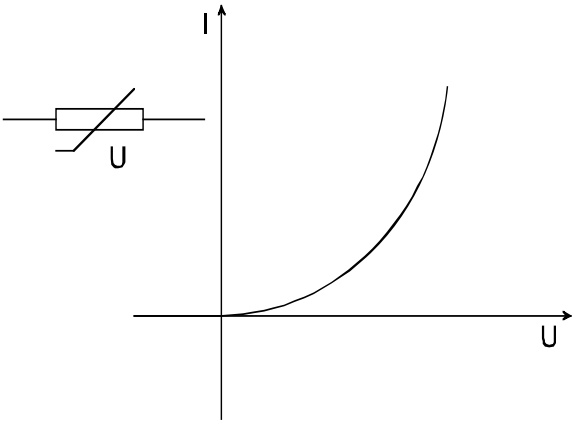
Die Gleichung $U = R * I$ ist immer angebbar oder verwendbar.

Eine Formulierung für das Ohm‘sche Gesetz ist sie aber nur dann, wenn $R \neq f(U,I)$.

Linearer Widerstand:
Ohm‘sches Gesetz gilt



Nichtlinearer Widerstand:
Ohm‘sches Gesetz gilt nicht



Beispiel: VDR
(spannungsabhängiger Widerstand, Varistor)

Angenäherte Beschreibung:

$$I/A = C \cdot (U/V)^n$$

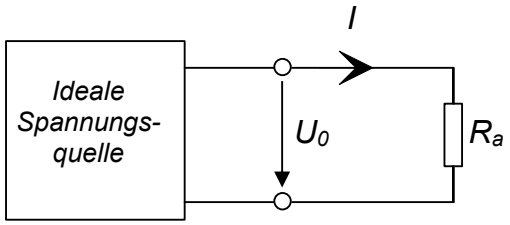
Das Ohm‘sche Gesetz ist nicht gültig in den meisten Bereichen der Halbleiter- und der Gasentladungstechnik.

2.2 Ersatzschaltungen technischer Spannungs- und Stromquellen

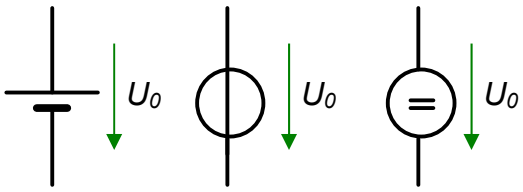
2.2.1 Ideale Spannungsquellen

Dabei handelt es sich um ideale (also fiktive) Elemente in elektrischen Schaltkreisen, aktive Zweipole. Ideale Spannungsquellen halten an ihren Klemmen unter allen Umständen (Belastungen) eine konstante Spannung U_0 aufrecht.

Ideal, fiktiv



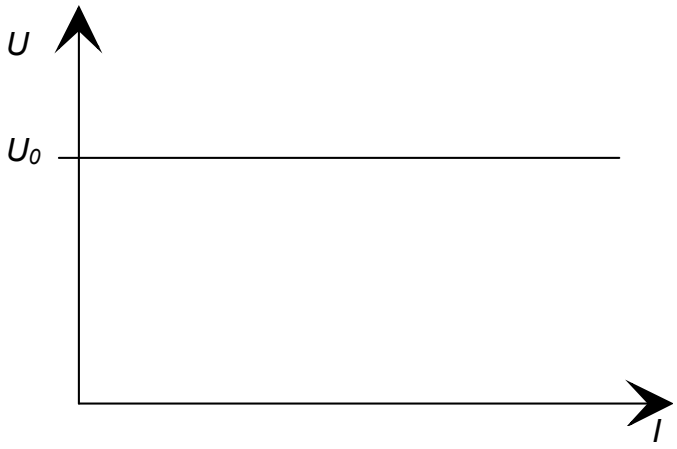
Symbole



abgeleitet vom Voltaschen Element

abgeleitet vom Generator

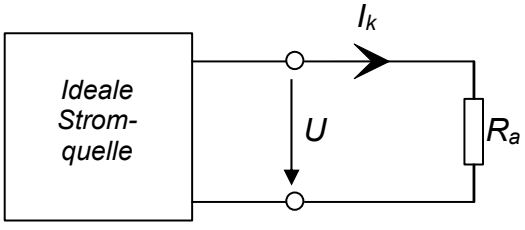
Kennlinie



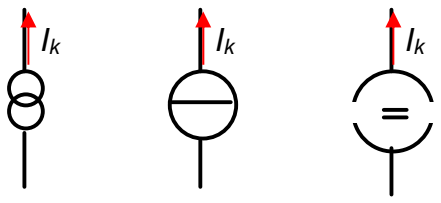
2.2.2 Ideale Stromquellen

Sie halten ab ihren Klemmen unter allen Umständen (Belastungen) einen konstanten Strom I_k aufrecht.

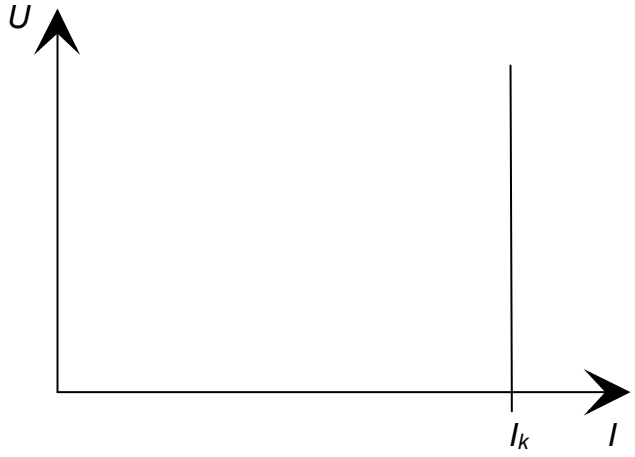
Ideal, fiktiv



Symbole

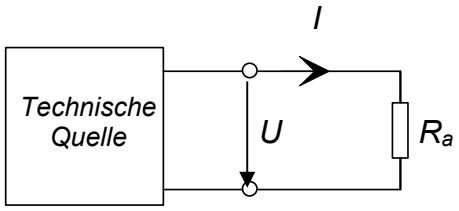


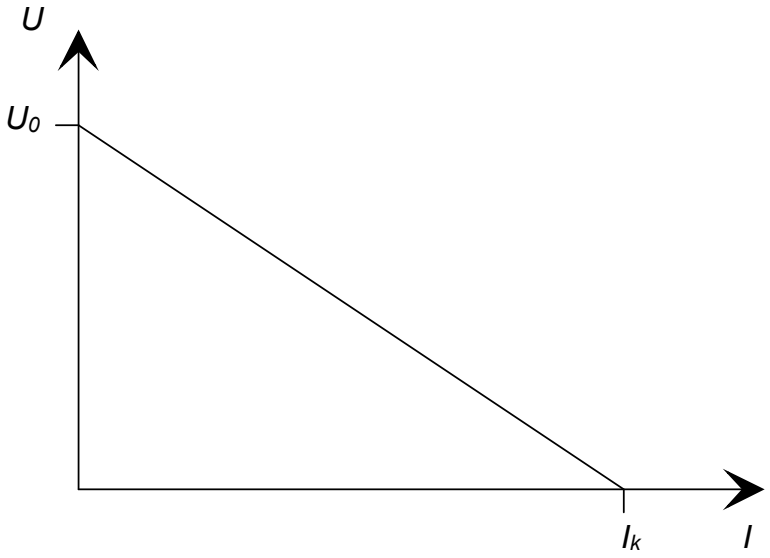
Kennlinie



2.2.3 Kennlinien für technische lineare elektrische Quellen

Wie sehr einfach ersichtlich, sind perfekte ideale Elemente in der Realität nicht möglich.
Für praktische Anwendungen kann die Kennlinie *U(I)* einer technischen Quelle meist in guter Näherung als Gerade dargestellt werden.



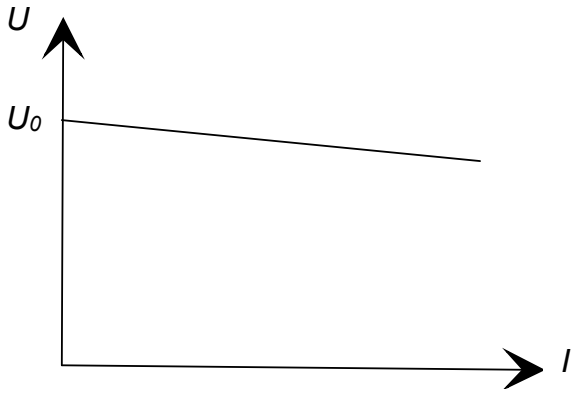


Sinnvolle Beschreibungen:

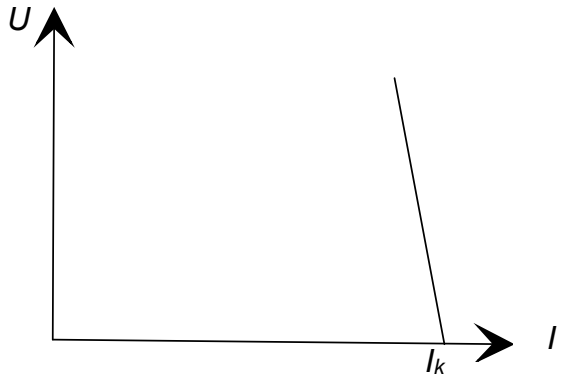
“Technische Spannungsquelle”
- bei besonders geringem Gefälle der Kennlinie (nahezu horizontal)

“Technische Stromquelle”
- bei besonders steiler Kennlinie (nahezu vertikal)

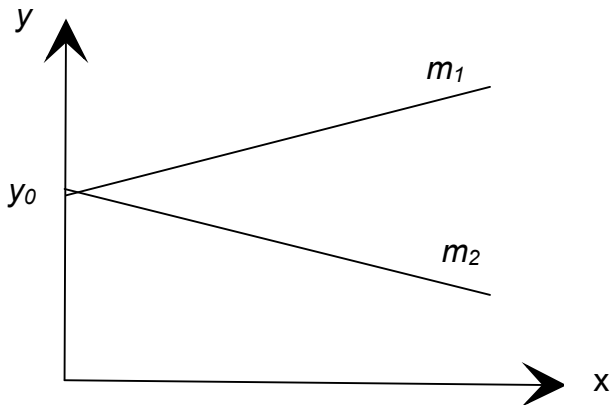
“Konstant-Spannungsquelle”

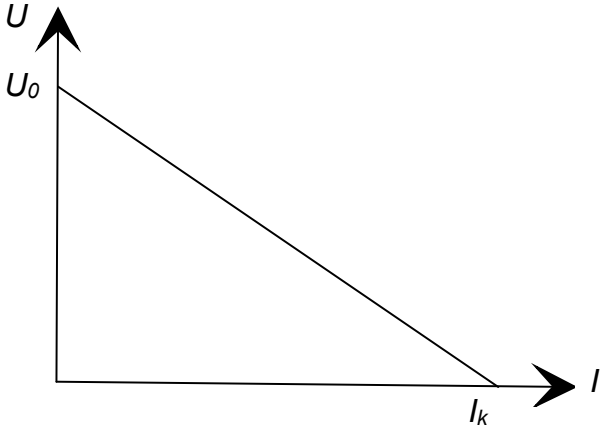


“Konstant-Stromquelle”



Analytische Beschreibung der Kennlinie:





Geradengleichung:

$$y = y_0 + m \cdot x$$

$x \rightarrow I$
$y \rightarrow U$
$y_0 \rightarrow U_0$
$m \rightarrow R_i$

mit: $m_1 > 0$
$m_2 < 0$

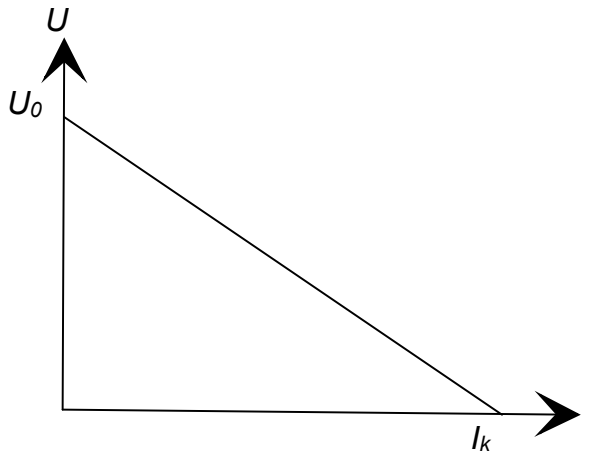
$$\boxed{U = U_0 - R_i \cdot I}$$

3 charakteristische Größen

U₀ **Leerlauf-Spannung (open-circuit voltage)**
Ik **Kurzschluss-Strom (short-circuit current)**
Ri **Innenwiderstand (intrinsic resistance)**

Kurzschluss-Punkt: $0 = U_0 - R_i \cdot I_k$ $\quad \boxed{U_0 = R_i \cdot I_k}$

Zwei Größen genügen zur eindeutigen Beschreibung einer Geraden. Daher gibt es diesen Zusammenhang zwischen U_0, I_k und R_i.



Weiterhin mögliche Beschreibung:
Auflösung der Geradengleichung nach *I*

$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

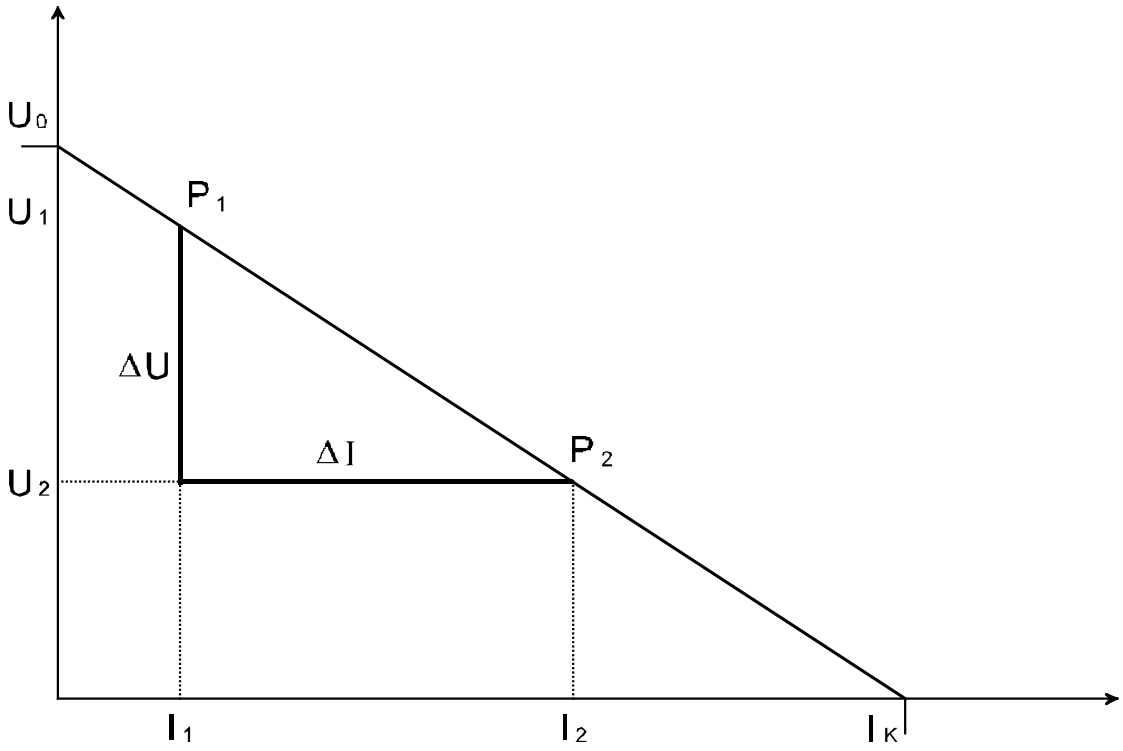
$$I = \frac{U_0 - U}{R_i} = \frac{U_0}{R_i} - \frac{U}{R_i}$$

$$\boxed{I = I_k - \frac{U}{R_i}}$$

Messtechnische Bestimmung der charakteristischen Größen U_0, I_k, R_i:

In den allermeisten Fällen ist die direkte Messung des Kurzschluss-Stroms I_k weder zulässig noch möglich. Häufig ist auch die direkte Messung der Leerlauf-Spannung U_0 nicht möglich (z.B. Thermoelement).

Aber: Die Kennlinie ist eine Gerade, die durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist. Mit den Ergebnissen für zwei beliebige Lastfälle P_1, P_2 können die charakteristischen Größen bestimmt werden.



Bestimmung von R_i:

ähnliche Dreiecke $\Rightarrow \frac{U_0}{I_K} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \Rightarrow \underline{\underline{R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}}}$

ΔU und ΔI repräsentieren Strecken im obigen Diagramm; daher sind sie stets positiv.

Bestimmung von U_0:

Beide Messpunkte müssen die Gleichung $U = U_0 - R_i \cdot I$ erfüllen (R_i ist ja bereits bestimmt).

$$U_1 = U_0 - R_i \cdot I_1 \qquad \text{oder} \qquad U_2 = U_0 - R_i \cdot I_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{U_0 = U_1 + R_i \cdot I_1}} \qquad\qquad \underline{\underline{U_0 = U_2 + R_i \cdot I_2}}$$

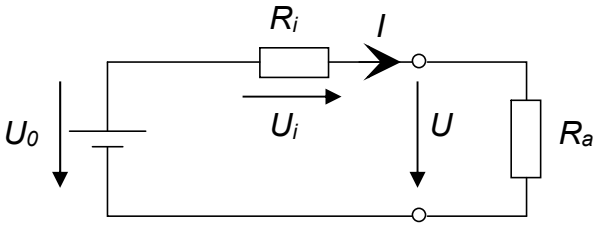
Beide Gleichungen liefern natürlich denselben Wert für U_0:

$$U_0 = U_1 + \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} \cdot I_1 \qquad U_0 = U_2 + \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} \cdot I_2$$
$$U_0 = \frac{U_1 \cdot I_2 - U_1 \cdot I_1 + U_1 \cdot I_1 - U_2 \cdot I_1}{I_2 - I_1} \qquad U_0 = \frac{U_2 \cdot I_2 - U_2 \cdot I_1 + U_1 \cdot I_2 - U_2 \cdot I_2}{I_2 - I_1}$$

$$U_0 = \frac{U_1 \cdot I_2 - U_2 \cdot I_1}{I_2 - I_1}$$

2.2.4 Spannungsquellen-Ersatzschaltung

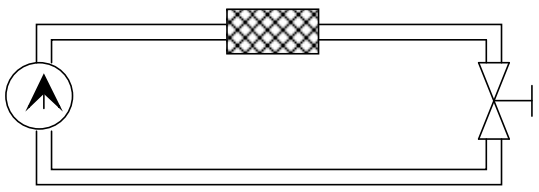
Ersatzschaltbild



$$U_0 = U_i + U$$
$$U = U_0 - U_i \qquad U_i = R_i \cdot I$$

$$\boxed{U = U_0 - R_i \cdot I}$$

Mechanisches Analogon



Ideale Pumpe mit Δp_0 = konst. (konstante Druckdifferenz) treibt eine Turbine an. Zwischen den beiden Elementen muss der Rohrleitungs-Widerstand berücksichtigt werden.

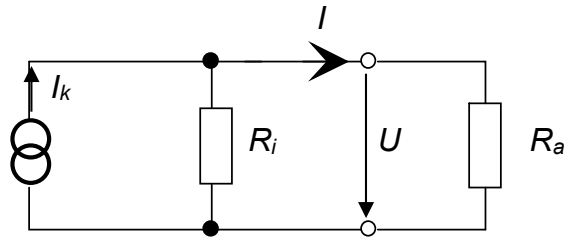
$$\Delta p_0 = \Delta p_i + \Delta p$$

Das Ersatzschaltbild gehorcht derselben Beziehung wie die lineare elektrische Quelle (siehe 2.2.3).

Ideale Spannungsquelle: Spannungsquellen-Ersatzschaltung mit $R_i = 0$.

2.2.5 Stromquellen-Ersatzschaltung

Ersatzschaltbild

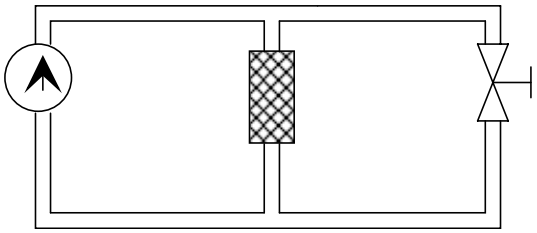


$$I_k = I_i + I$$

$$I = I_k - I_i \qquad I_i = \frac{U}{R_i}$$

$$\boxed{I = I_k - \frac{U}{R_i}}$$

Mechanisches Analogon



Ideale Pumpe mit V_p = konst. (konstanter Volumen-Wasserstrom) treibt eine Turbine an. Aufgrund der Leitungscharakteristik muss der Rohrleitungs-Widerstand nun durch ein parallel geschaltetes Element berücksichtigt werden.

$$V_p = V_i + V$$

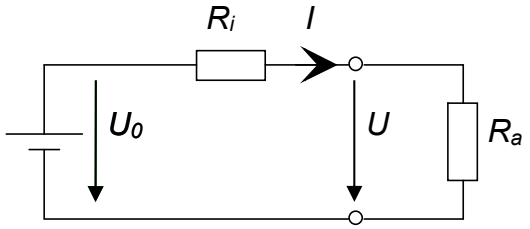
Das Ersatzschaltbild gehorcht derselben Beziehung wie die lineare elektrische Quelle (siehe 2.2.3).

Ideale Stromquelle: Stromquellen-Ersatzschaltung mit $R_i \to \infty$.

2.2.6 Äquivalenz zwischen Spannungs- und Stromquellen

Es ist möglich, eine technische, lineare Quelle entweder als technische Spannungsquelle oder als technische Stromquelle zu beschreiben. Abhängig vom Anwendungsfall kann daher manchmal auch eine Umwandlung einer technischen Spannungsquelle in eine technische Stromquelle erforderlich sein und umgekehrt.

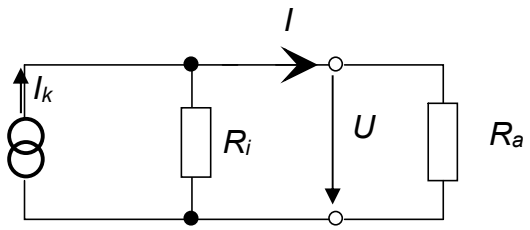
Technische Spannungsquelle



$$R_i = \frac{1}{G_i}$$

$$U_0 = R_i \cdot I_k = \frac{I_k}{G_i}$$

Technische Stromquelle



$$G_i = \frac{1}{R_i}$$

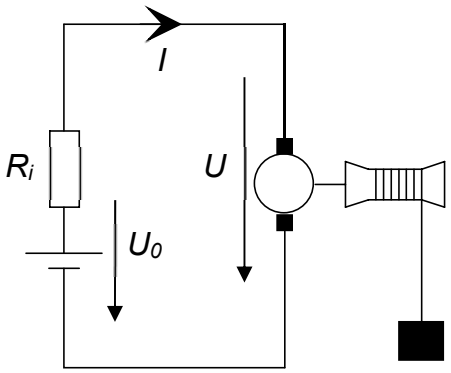
$$I_k = G_i \cdot U_0 = \frac{U_0}{R_i}$$

2.3 Elektrische Leistung und Energie (Arbeit)

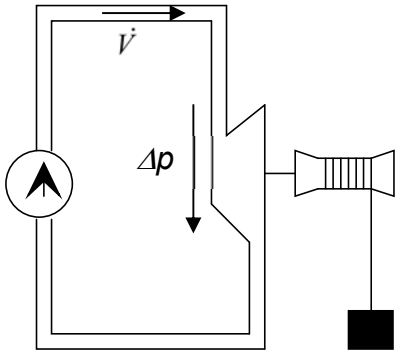
2.3.1 Berechnung von Leistung und Energie

Wir nehmen an, dass ein Gewicht anzuheben ist. Diese Aufgabe kann entweder mechanisch mit Hilfe einer Turbine (von einer technischen Pumpe angetrieben) oder elektrisch mit Hilfe eines Motors (angetrieben aus einer technischen Spannungsquelle) erledigt werden.

Technische Spannungsquelle



Technische Pumpe



Leistung am Motor

$$P \sim I$$

$$P \sim U$$

Leistung an der Turbine

$$P \sim \dot{V}$$

$$P \sim \Delta p$$

Wenn die Arbeit ausgeführt wird, ist es schwierig, Wasser durch die Turbine zu treiben. An der Turbine stellt sich eine Druckdifferenz ein, die überwunden werden muss.

Durch sinnvolle Wahl der Einheiten wird der Proportionalitätsfaktor in beiden Fällen zu 1:

$$\boxed{P = U \cdot I}$$

$$1W = 1V \cdot 1A \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{1V = 1\frac{W}{A} = 1\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}}}$$

$$\boxed{P = \Delta p \cdot \dot{V}}$$

$$1W = 1Pa \cdot 1\frac{m^3}{s} = 1\frac{N}{m^2} \cdot \frac{m^3}{s}$$

$$1W = 1\frac{Nm}{s} = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

$$\underline{\underline{1Ws = 1Nm}}$$

Definition der Einheit "Volt"

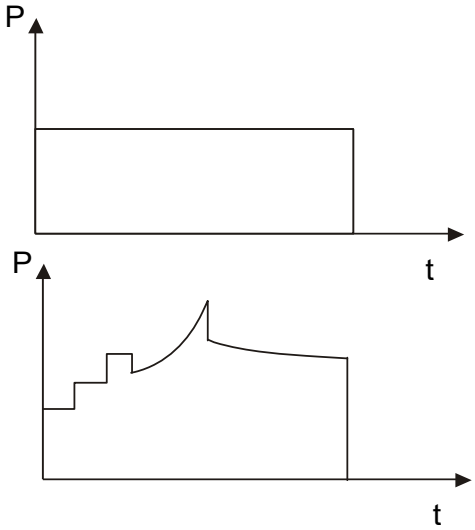
Elektrische Energie = Mechanische Arbeit

$$\boxed{P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}} \quad \Leftarrow \quad \text{Weitere Beschreibungsmöglichkeiten}$$

Die mechanische Arbeit ist zu einem gewissen Grad ersetzbar durch die elektrische Energie. Daher können wir sagen:

aufgewendete Energie = verrichtete Arbeit

bei konstanter Leistung: $W = P \cdot t$



allgemein: $\boxed{W = \int P dt}$

Einheit $[\mathrm{W}] = \mathrm{Ws} = \mathrm{J\ (Joule)}$

Die Energie (Arbeit) kann in jedem Fall anschaulich dargestellt werden als Fläche unter der Leistungskurve.

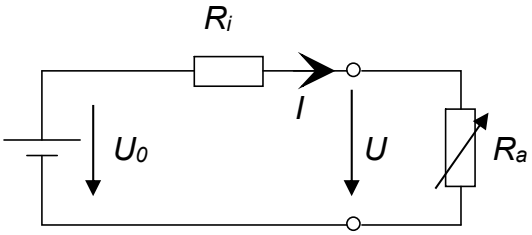
Um die Größenordnung eines Joule als SI-Einheit für die Energie zu demonstrieren, vergleichen wir dazu eine häufig benutzte Einheit der elektrischen Energietechnik:

$$1kWh = 10^3 W \cdot 3600s = 3{,}6 \cdot 10^6 Ws$$

2.3.2 Leistungsanpassung

Für eine gegebene technische Spannungsquelle wollen wir nun untersuchen, unter welchen Bedingungen sich eine maximale Leistungsabgabe an einen Lastwiderstand R_a ergibt.

Technische Spannungsquelle:



gegeben: U_0, R_i
gesucht: P_a in Abhängigkeit von R_a

Grenzbetrachtungen:

$$R_a = 0 \Rightarrow U = 0 \Rightarrow P_a = 0 \cdot I_K = 0$$

$$R_a = \infty \Rightarrow I = 0 \Rightarrow P_a = U_0 \cdot 0 = 0$$

Zwischen diesen beiden Grenzfällen muss ein Maximum liegen!

Ansatz: P_a wird als Funktion von R_a formuliert, dann die Ableitung gebildet und diese zu 0 gesetzt (Extremum).

$$P_a = R_a \cdot I^2$$

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$$

$$P_a = \frac{R_a \cdot {U_0}^2}{(R_i + R_a)^2} = \frac{{U_0}^2}{R_i} \cdot \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\left(1 + \frac{R_a}{R_i}\right)^2}$$

Vereinfachung:

$$y = \frac{x}{(1+x)^2} \text{ mit } x = \frac{R_a}{R_i} \text{ und } y = \frac{P_a}{\frac{{U_0}^2}{R_i}}$$

Quotientenregel für Ableitungen:

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Bildung der Ableitung:

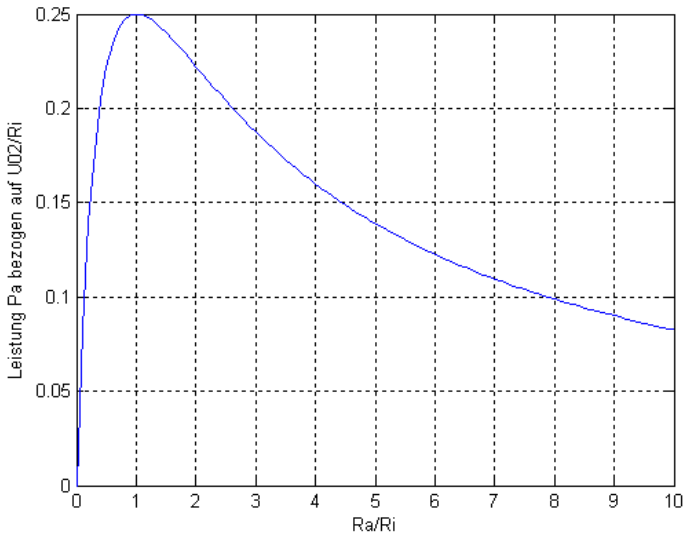
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot (1+x)^2 - x \cdot 2 \cdot (1+x)}{(1+x)^4} = 0 \Leftrightarrow (1+x)^2 = 2 \cdot x \cdot (1+x) \Leftrightarrow 1 + x = 2 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = 1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_a}{R_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_a = R_i} \quad \textbf{Maximum}$$

für $R_a = R_i$: $y_{max} = \frac{1}{(1+1)^2}$ $\underline{\underline{y_{max} = \frac{1}{4}}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_{a,max}}{\frac{{U_0}^2}{R_i}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{a,max} = \frac{{U_0}^2}{4 \cdot R_i}}$$

R_a/R_i	$P_a/ U_0^2/R_i$	η/ %
0,1	0,083	9,1
0,2	0,139	16,7
0,5	0,222	33,3
0,75	0,244	42,9
1,0	0,250	50
1,5	0,240	60
2	0,222	66,7
3	0,187	75
4	0,160	80
5	0,139	83,3
7	0,109	87,5
10	0,083	90,9



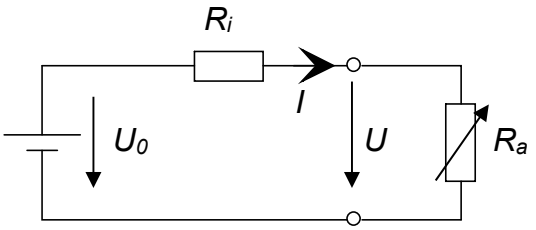
Maximum für $R_a/R_i = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{R_a = R_i}$

Maximalwert: $P_{a,max}/U_0^2/R_i = 0{,}25$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_{a,\max} = \frac{U_0^{\,2}}{4 \cdot R_i}}$

Wir fassen zusammen: Eine gegebene Quelle gibt maximale Leistung ab für $R_a = R_i$. Wir nennen diesen Fall Leistungsanpassung.

2.3.3 Wirkungsgrad

In einem weiteren Ansatz untersuchen wir jetzt, wie effizient eine technische Spannungsquelle einen Lastwiderstand mit Leistung versorgt. Mit anderen Worten: Wir wollen eine Beziehung aufstellen zwischen der Nutzleistung und den auftretenden Verlusten. Wir nehmen dazu dieselbe Ersatzschaltung wie vor (2.3.2).



$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Gesamtaufwand}} = \frac{output}{input} \qquad \text{hier:} \quad \eta = \frac{P_a}{P_i + P_a}$$

Nutzleistung: $P_a = R_a \cdot I^2 = \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \cdot U_0^{\,2}$ $\qquad I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$

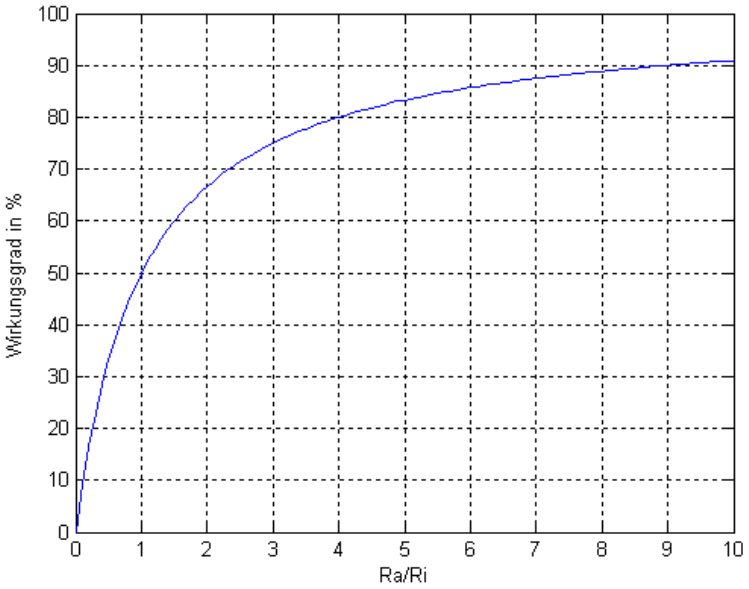
Verlustleistung: $P_i = R_i \cdot I^2 = \frac{R_i}{(R_i + R_a)^2} \cdot U_0^{\,2}$

Gesamtleistung: $P_i + P_a = (R_a + R_i) \cdot I^2 = \frac{R_a + R_i}{(R_i + R_a)^2} \cdot U_0^{\,2} = \frac{U_0^{\,2}}{R_i + R_a} = U_0 \cdot I$

$$\eta = \frac{\frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \cdot U_0^{\,2}}{\frac{R_a + R_i}{(R_i + R_a)^2} \cdot U_0^{\,2}}$$

$$\underline{\underline{\eta = \frac{R_a}{R_i + R_a}}}$$

$$\underline{\underline{\eta = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{1 + \frac{R_a}{R_i}}}}$$



Im Fall der Leistungsanpassung erhalten wir:

$$R_a = R_i \Rightarrow \underline{\underline{\eta = 0{,}5}}$$

Wir fassen erneut zusammen: Je höher der Faktor R_a/R_i, desto besser ist der Wirkungsgrad. Offensichtlich existiert ein Zielkonflikt zwischen Leistungsanpassung und Wirkungsgrad. In praktischen, technisch relevanten Fällen muss daher häufig ein Kompromiss zwischen beiden unterschiedlichen Zielsetzungen gefunden werden, der aber stets vom Einzelfall abhängt. Als stark vereinfachten Ansatz können wir formulieren:

<u>Energietechnik</u>:	Die erzeugte Gesamtleistung soll möglichst vollständig (effizient) genutzt werden. Ziel: Hoher Wirkungsgrad $\Rightarrow$ $\eta \rightarrow 1$
<u>Informationstechnik</u>:	Die Geräte (= Spannungsquellen) kosten Geld und sollen daher möglichst gut genutzt werden; der Nutzer möchte eine möglichst hohe Leistungsabgabe. Ziel: Leistungsanpassung $\Rightarrow$ $R_a = R_i$

2.3.4 <u>Elektrowärme</u>

Das “Joule‘sche Gesetz” (James Prescott Joule, 1841) sagt über die Wärmemenge *Q*, die in einem stromdurchflossenen elektrischen Leiter mit dem Widerstand *R* freigesetzt wird:

$$Q \sim R \cdot I^2 \cdot t$$

Dies ist jedoch nicht wirklich eine neue Gesetzmäßigkeit, denn diese Wärmemenge ist identisch mit der eingespeisten Wärmeenergie:

$$Q = W_{therm} = P \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t \qquad \text{für } I \neq f(t)$$

$$Q = W_{therm} = \int p \cdot dt = R \cdot \int i^2 \cdot dt \qquad \text{allgemein}$$

Der Proportionalitätsfaktor im “Joule‘schen Gesetz” ist also (wieder einmal) gleich 1.

Anmerkung: Wir benutzen kleine Buchstaben ***u, i, p*** für Spannungen, Ströme und Leistungen, wenn es sich um zeitabhängige Größen handelt.

Technische Heizkörper:

Hier ist Elektrowärme ausdrücklich erwünscht. Wegen der Abstrahlungsverluste und der Verlustwärme in den Zuleitungen ist der Wirkungsgrad stets $\eta < 100\%$.

$$\eta = \frac{P_{nutz}}{P_{gesamt}}$$

$$P_{nutz} = \eta \cdot P_{gesamt} = \eta \cdot P_{el}$$

$$W_{nutz} = \eta \cdot P_{el} \cdot t$$

für $P_{el} \neq f(t)$

Zusammenhang zwischen der zugeführten Energie und der Temperaturerhöhung:

$$W_{nutz} = m \cdot c \cdot \Delta T$$

c = spezifische Wärmekapazität des zu erwärmenden Materials

Anmerkung 1: Manchmal wird noch eine alte Einheit verwendet:
1 kcal = 4186,8 J = 1,163*10^{-3} kWh

Anmerkung 2: Die physikalischen Größen "Arbeit" und "Energie" sind bis zu einem gewissen Grad austauschbar (siehe 2.3.1):

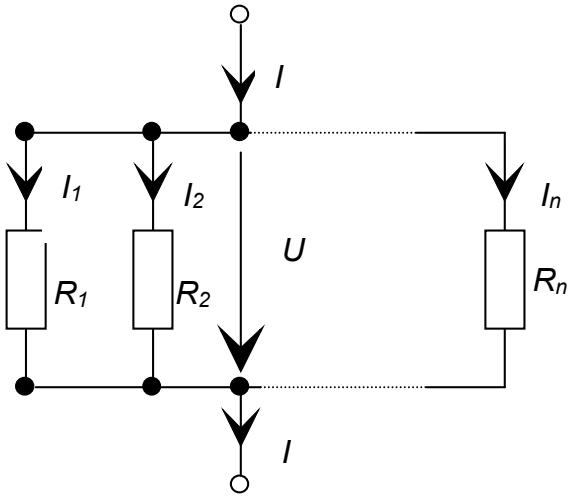
aufgewendete Energie = verrichtete Arbeit

Energieinhalt eines Systems = Arbeit, die vom System verrichtet werden kann

Beispiel:
Um ein Gewicht von 1N (exakt: eine Masse mit einer Gewichtskraft von 1 N) um 1m anzuheben, muss eine mechanische Arbeit von
W_{mech} = 1Nm verrichtet werden. Dann hat das Gewicht eine (zusätzliche) potenzielle Energie von W_{pot} = 1J = 1Nm.

2.4 Berechnung linearer Netzwerke

2.4.1 Parallelschaltung von Widerständen; Stromteiler



Qualitative Bedeutung:
Parallel zu dem kleinsten der n Teilwiderstände stehen dem Strom noch weitere Wege zur Verfügung: Der Gesamtwiderstand ist kleiner als der kleinste Teilwiderstand.

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n$$

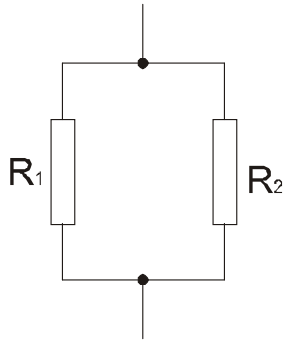
$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n}$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{R\nu}} \qquad \boxed{G = \sum_{\nu=1}^{n} G\nu}$$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte

Nützliche Gleichung für die Parallelschaltung zweier Widerstände:

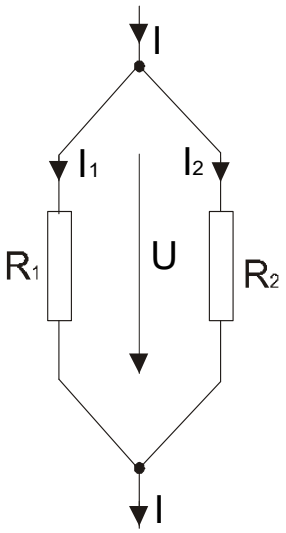


$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

(bitte aufpassen: diese Gleichung ist nur gültig, wenn zwei Widerstände parallel geschaltet werden)

Stromteiler: Parallelschaltung mehrerer Widerstände zum “Herunterteilen” (Reduzierung) eines vorhandenen Stroms *I*.



$$I = G \cdot U = (G_1 + G_2) \cdot U = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U$$

$$I_1 = G_1 \cdot U = \frac{1}{R_1} \cdot U$$

$$I_2 = G_2 \cdot U = \frac{1}{R_2} \cdot U$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2}$$

Teil-Strom / Gesamt-Strom = Teil-Leitwert / Gesamt-Leitwert
Teil-Strom / Teil-Strom = Teil-Leitwert / Teil-Leitwert

Beim Stromteiler verhalten sich die Ströme zueinander wie die zugehörigen Leitwerte (der stromdurchflossenen Widerstände)

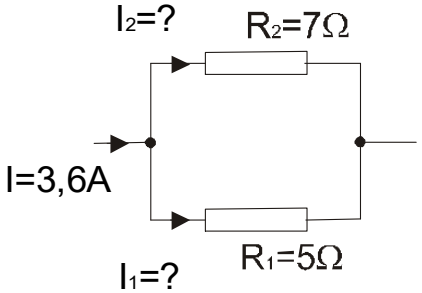
Formulierung der Stromteiler-Verhältnisse unter Verwendung der Widerstandswerte:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

(erweiterungsfähig, anwendbar auch bei mehr als zwei parallelen Widerständen)

Anwendung des Stromteilers hauptsächlich in der Messtechnik.

Beispiel: “Herunterteilen” eines Stromes

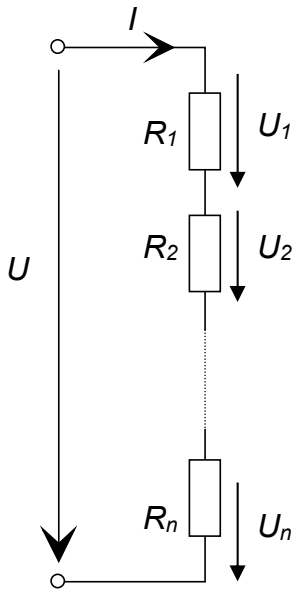


$$\frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{\frac{1}{5\Omega}}{\frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{7\Omega}} = \frac{7}{7+5} = \frac{7}{12}$$

$$I_1 = \frac{7}{12} \cdot I = \frac{7}{12} \cdot 3{,}6A = 2{,}1A = I_1$$

$$I_2 = I - I_1 = 3{,}6A - 2{,}1A = 1{,}5A = I_2$$

2.4.2 Reihenschaltung von Widerständen; Spannungsteiler



$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \ldots + R_n \cdot I$$

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

$$R = \sum_{\nu=1}^{n} R\nu$$

Bei der Reihenschaltung addieren sich die Widerstände

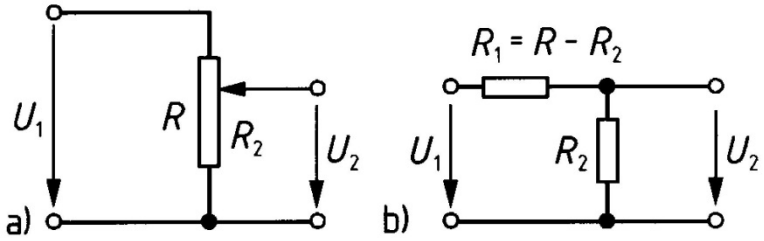
Spannungsteiler:

$$\left.\begin{aligned} U &= R \cdot I \\ U_1 &= R_1 \cdot I \\ U_2 &= R_2 \cdot I \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ U_n &= R_n \cdot I \end{aligned}\right\} \quad \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R} \qquad \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R} \qquad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Teil-Spannung / Gesamt-Spannung = Teil-Widerstand / Gesamt-Widerstand
Teil-Spannung / Teil-Spannung = Teil-Widerstand / Teil-Widerstand

Beim Spannungsteiler verhalten sich die Spannungen zueinander wie die zugehörigen Widerstände, an denen sie abfallen

Technische Ausführungen eines Spannungsteilers sind häufig einstellbar (in Stufen oder stufenlos, diskret oder kontinuierlich):



Schiebe- oder Drehwiderstände (Potenziometer).

Häufige Einstellung:

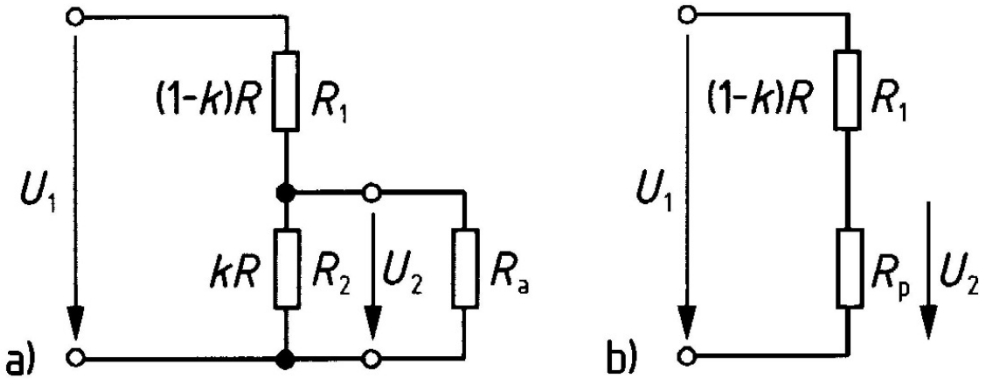
$$R_2 = k \cdot R$$

Der Wert von *k* kann an einer Skala abgelesen werden.

$U_2 = k \cdot U_1 \quad mit \quad 0 \le k \le 1$ (im unbelasteten Zustand)

Sinnvolle Anwendungen eines Spannungsteilers sind im Allgemeinen nur für Messzwecke möglich, manchmal auch in der Elektronik. Grund ist der schlechte Wirkungsgrad.

<u>Belasteter Spannungsteiler (mit Belastung R_a)</u>



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_p}{R_1 + R_p} = \frac{\frac{R_2 \cdot R_a}{R_2 + R_a}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_a}{R_2 + R_a}} = \frac{R_2 \cdot R_a}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_a + R_2 \cdot R_a} = \frac{R_2}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_a} + R_1 + R_2}$$

für $R_a \to \infty$ (unbelasteter Zustand): $\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Verwendung der Größe *k*:

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} R_2 &= k \cdot R \\ R_1 &= (1-k) \cdot R \end{aligned}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{k \cdot R}{\frac{(1-k) \cdot R \cdot k \cdot R}{R_a} + R}$$

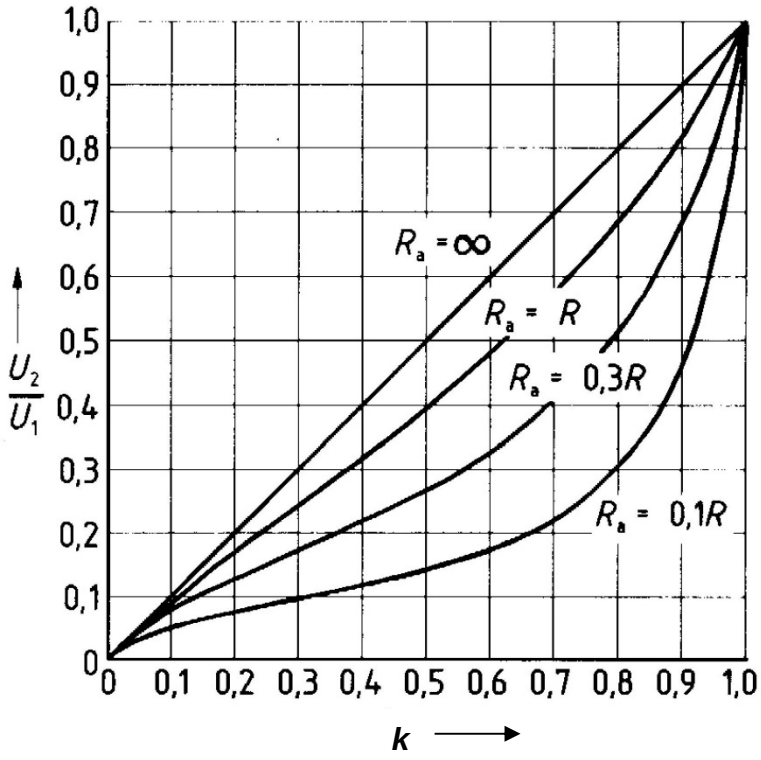
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{k}{\frac{(1-k) \cdot k \cdot R}{R_a} + 1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{k}{1 + (1-k) \cdot k \cdot \frac{R}{R_a}}$$

für $R_a \to \infty$ (unbelasteter Zustand):

$$\frac{U_2}{U_1} = k$$

Für den belasteten Spannungsteiler gibt es also einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Widerstände (Größe *k*) und dem Verhältnis der Spannungen U_2/U_1 (siehe Diagramm).



2.4.3 Kirchhoff'sche Regeln

Im Folgenden werden die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten für die Analyse von elektrischen Schaltungen vorgestellt, die die Basis für die Beschäftigung mit solchen Schaltungen darstellen, und aus denen die anderen Verfahren zur Schaltungsanalyse jeweils abgeleitet werden können. Diese Grundlagen werden Kirchhoff'sche Gesetze genannt (Gustav Robert Kirchhoff, 1824 -. 1887); sie beschäftigen sich mit Strömen und Spannungen in einer Schaltung.

Um die Schaltungsanalyse aufnehmen zu können, müssen zunächst einige Festlegungen für die elektrische Schaltung getroffen werden.

Anmerkung: Die hier dargestellten Untersuchungen und aufgestellten Gleichungen sind gleichermaßen auch für nichtlineare Netzwerke gültig, d.h. für elektrische Schaltungen, die auch nichtlineare Elemente enthalten.

Festlegungen:

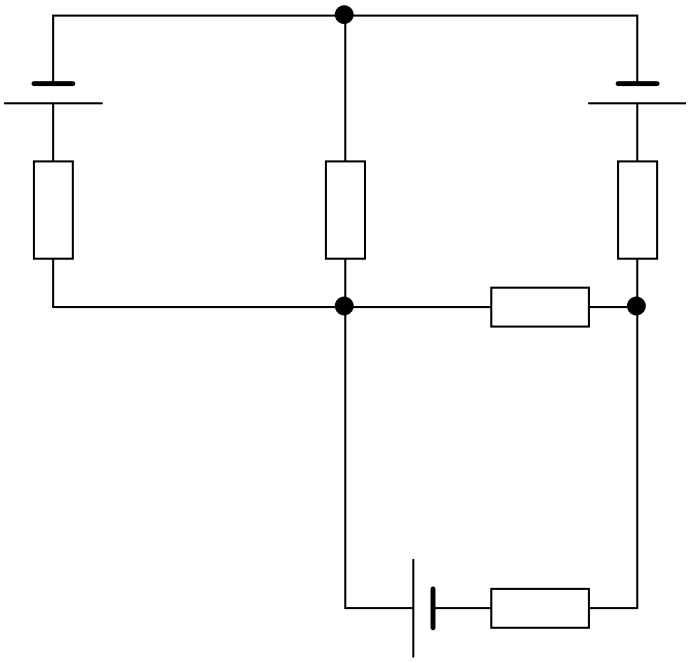
Netzwerk Zusammenschaltung aktiver und/oder passiver Zweipole

Knoten Stromverzweigungs-punkt

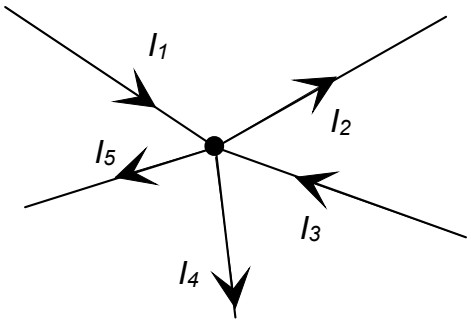
Zweig direkte Verbindung zwischen zwei Knoten

Masche einfach geschlossener Weg innerhalb eines Netzwerks entlang vorhandener Zweige

Beispiel für ein einfaches Netzwerk:



Knotenregel:



$\sum I_{zu} = \sum I_{ab}$

hier im Beispiel:

$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5$

Übliche Formulierung:

$$\sum I_\nu = 0$$

1. Kirchhoff'sche Gleichung (KCL)

An einem Knoten ist die Summe aller Ströme gleich 0

Bedingung: Alle Stromzählpfeile werden in Bezug auf den Knoten mit derselben Richtung angesetzt (entweder weist die positive Zählpfeil-Richtung zum Knoten hin oder von ihm weg). Ströme mit der dann abweichenden Zählpfeil-Richtung sind mit negativem Vorzeichen einzusetzen.

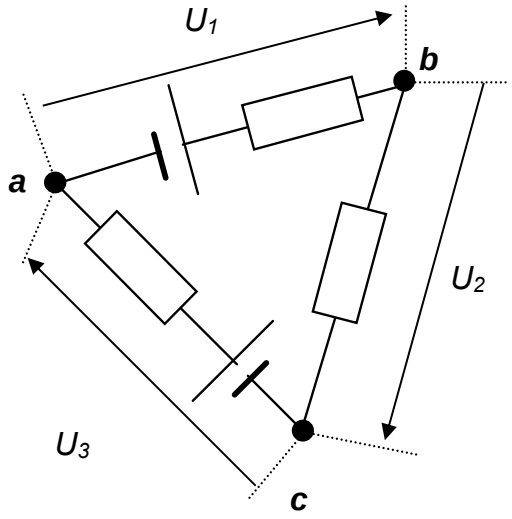
Für das obige Beispiel ergibt sich dann:

- entweder: Richtung zum Knoten hin = positiv $\Rightarrow$ $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$

- oder: Richtung vom Knoten weg = positiv $\Rightarrow$ $-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0$

Beide Gleichungen führen selbstverständlich zu denselben Ergebnissen!

Maschenregel:



$U_1 = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$

$U_2 = U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c$

$U_3 = U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$

$U_1 + U_2 + U_3 = 0$

U_{xy}: Spannung zwischen den Punkten x und y

φ_x: Potenzial des Punktes x (Spannung gegenüber dem Erdpotenzial)

Übliche Formulierung:

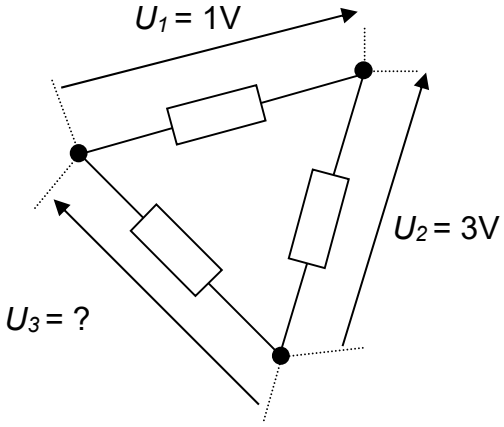
$$\sum U_\nu = 0$$

2. Kirchhoff'sche Gleichung (KVL)

In einer Masche ist die Summe aller Spannungen gleich 0

Bedingung: Alle Spannungszählpfeile "laufen einander nach", d.h. für ein positives Vorzeichen schließt sich an jede Zählpfeil-Spitze ein Zählpfeil-Ende an. Spannungen mit abweichender Zählpfeil-Richtung sind mit negativem Vorzeichen einzusetzen.

Beispiele:



entweder: positive Zählpfeil-Richtung im Uhrzeigersinn

$U_1 - U_2 + U_3 = 0$

oder: positive Zählpfeil-Richtung im Gegenuhrzeigersinn

$U_2 - U_1 - U_3 = 0$

Beide Gleichungen führen natürlich zum selben Ergebnis:

$U_3 = U_2 - U_1$

$U_3 = 3\ \text{V} - 1\ \text{V}$

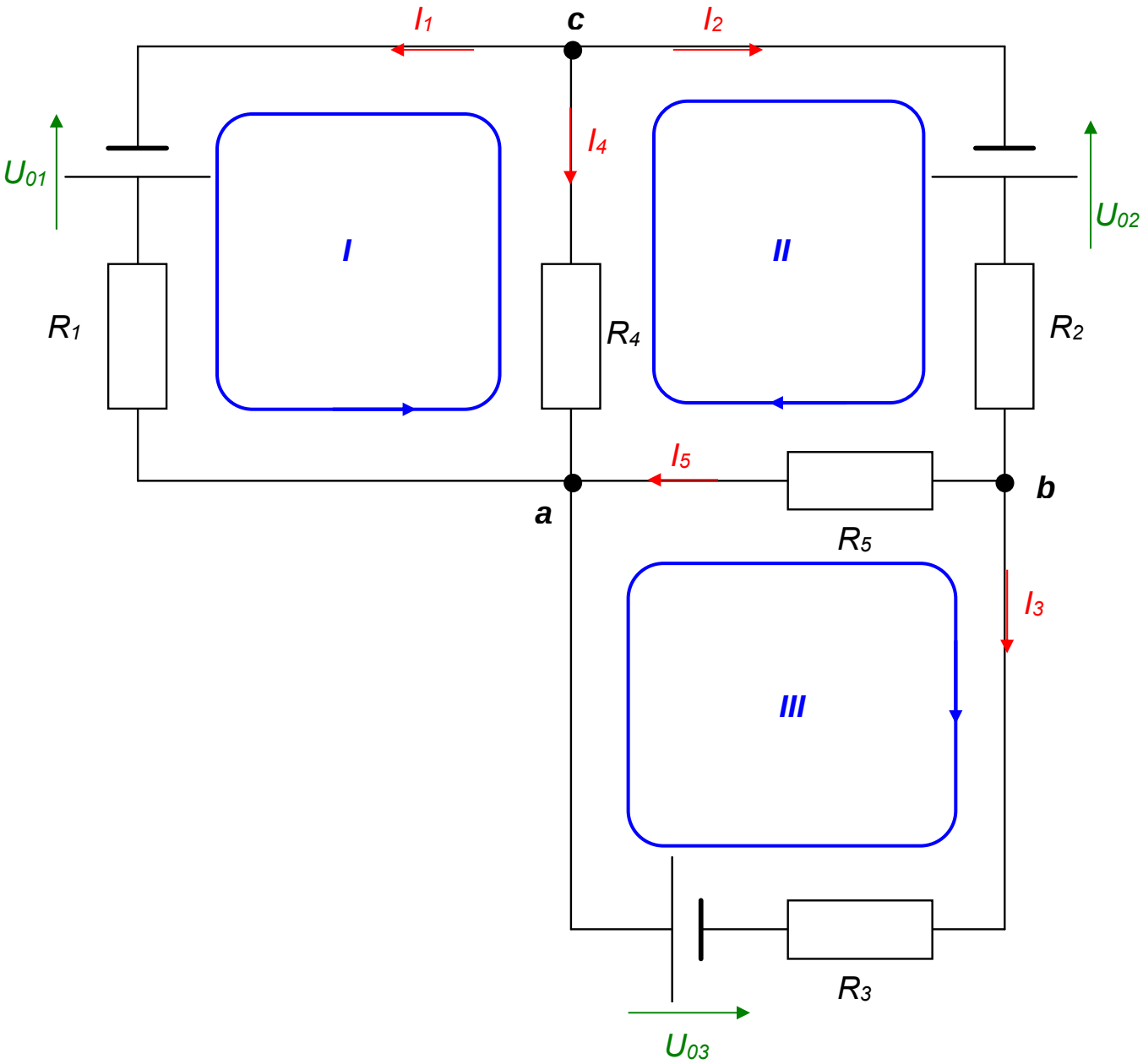
$\underline{U_3 = 2\ \text{V}}$

Dieser Zusammenhang kann auch etwas anders formuliert werden:

Die Spannung zwischen zwei Punkten ist vom Wege unabhängig.

2.4.4 Knoten- und Maschenanalyse

Das grundsätzliche Vorgehen zur Analyse einer elektrischen Schaltung wird an einem Beispiel diskutiert. Dazu wird das folgende Netzwerk betrachtet, für das die drei Leerlaufspannungen U_{01} … U_{03} und die fünf Widerstände R_1 … R_5 bekannt sind:



Das Netzwerk hat: $k = 3$ Knoten
$z = 5$ Zweige
$\Rightarrow$ 5 unbekannte Ströme

Anwendung von Knoten- und Maschenregeln:

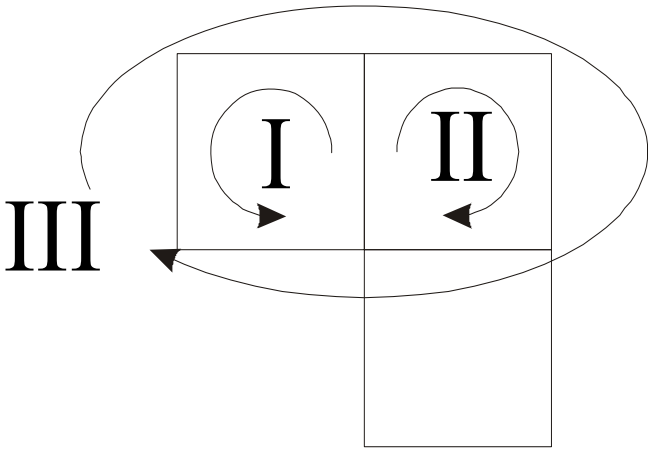
Knoten a	I_1		$+I_3$	$+I_4$	$+I_5$	= 0
Knoten b		I_2	$-I_3$		$-I_5$	= 0
Masche I	$R_1 \cdot I_1$			$-R_4 \cdot I_4$	$-U_{01}$	= 0
Masche II		$R_2 \cdot I_2$		$-R_4 \cdot I_4$	$+R_5 \cdot I_5 - U_{02}$	= 0
Masche III			$R_3 \cdot I_3$		$-R_5 \cdot I_5 - U_{03}$	= 0

Bemerkungen:

Knoten a/b: Stromrichtung zum Knoten $\rightarrow$ positiv
(es wäre natürlich auch möglich gewesen, die umgekehrte Stromrichtung als positive zu definieren).

Knoten c: $I_1 + I_2 + I_4 = 0$ (= eine redundante Gleichung)
Diese Gleichung ergibt sich direkt aus der Addition der beiden ersten Knotengleichungen; es ist also keine neue Information enthalten (das nennt man **lineare Abhängigkeit** von Gleichungen). Grundsätzlich weist jede neue Knotengleichung einen neuen Strom auf, nur die letzte Gleichung nicht. Aus diesem Grunde können nur ***k*-1 Knotengleichungen** herangezogen werden.

z Zweige: Die restlichen Gleichungen zur Bestimmung der z unbekannten Ströme sind dann *z* - (*k*-1) = ***z* - *k* + 1 Maschengleichungen**. Hier im Beispiel sind *z* - *k* + 1 = 5 - 3 + 1 = 3 Maschengleichungen nötig.
Die Maschen müssen so ausgewählt werden, dass die Maschengleichungen nicht linear voneinander abhängen. Lineare Abhängigkeit träte z.B. bei der nebenstehend dargestellten Maschenauswahl auf. Zur Auswahl von Maschen, die nicht zu linear voneinander abhängigen Gleichungen führen, sei auf das Verfahren des „Vollständigen Baumes“ verwiesen.



Allgemeine Regeln für die Anwendung der Knoten- und Maschenanalyse:

- *k* und *z* ermitteln
- Stromzählpfeile festlegen (beliebig)
- *k* - 1 Knotengleichungen aufstellen
- positive Spannungszählpfeile festlegen
- *z* - *k* + 1 Maschengleichungen aufstellen (nicht linear voneinander abhängig)
- Gleichungssystem ordnen

∗ Gleichungssystem lösen

Maschenauswahl – das Verfahren des Vollständigen Baumes:

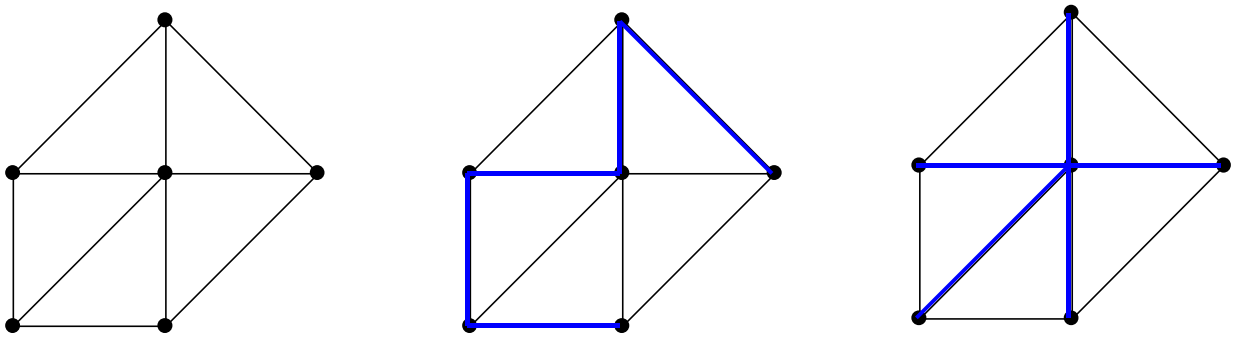
Das Verfahren dient der Auswahl von $z - k + 1$ Maschen, so dass sich sicher Gleichungen ergeben, die nicht linear voneinander abhängen.

Ein Vollständiger Baum ist eine in sich nicht geschlossene Verbindung aller Knoten eines Netzwerks entlang vorhandener Zweige.

Beispiel:

Graph eines Netzwerks

Zwei Beispiele für einen Vollständigen Baum (von ca. 120 für dieses Beispiel)



Ein Vollständiger Baum enthält $k - 1$ Zweige.

Die übrigen $z - k + 1$ Zweige, die nicht zum Vollständigen Baum gehören, nennt man **Verbindungszweige**.

Maschenauswahl: Jede ausgewählte Masche enthält genau einen Verbindungszweig, ansonsten nur Zweige des Vollständigen Baumes.

Maschen, die auf diese Weise festgelegt werden, liefern immer Maschengleichungen, die nicht linear voneinander abhängen. Nach der Wahl des Vollständigen Baumes liegen die zu verwendenden Maschen eindeutig fest.

Sollen bestimmte Zweige zu Verbindungszweigen werden (z.B. beim Maschenstromverfahren, damit die in ihnen fließenden Ströme zu Maschenströmen werden – siehe 2.4.7), so müssen diese Zweige bei der Aufstellung des Vollständigen Baumes ausgespart werden.

2.4.5 Überlagerungsverfahren (Superposition)

Für ein **lineares Netzwerk** ist das Überlagerungsverfahren (Superposition) gültig (Lineare Netzwerke beinhalten neben idealen Strom- oder/und Spannungsquellen ausschließlich lineare Elemente. Für ein lineares Element gilt: $U \sim I$).

Überlagerungsverfahren

Enthält ein lineares Netzwerk mehr als eine Quelle, können die Teilströme, die von den einzelnen Quellen erzeugt werden, getrennt und unabhängig voneinander berechnet werden. Der Gesamtstrom an einer beliebigen Stelle des Netzwerks ergibt sich aus der vorzeichenrichtigen Addition (Überlagerung = Superposition) der entsprechenden Teilströme.

Vorgehensweise

Der Strom an der interessierenden Stelle des Netzwerks wird berechnet:

1 Nur die 1. Spannungs- oder Stromquelle wird berücksichtigt, alle anderen idealen Spannungsquellen werden durch Kurzschlüsse, alle anderen Stromquellen durch Leerläufe ersetzt.

2 Nur die 2. Spannungs- oder Stromquelle wird berücksichtigt, alle anderen idealen Spannungsquellen werden durch Kurzschlüsse, alle anderen Stromquellen durch Leerläufe ersetzt.
…

3 Nur die letzte (n-te) Spannungs- oder Stromquelle wird berücksichtigt, alle anderen idealen Spannungsquellen werden durch Kurzschlüsse, alle anderen Stromquellen durch Leerläufe ersetzt.

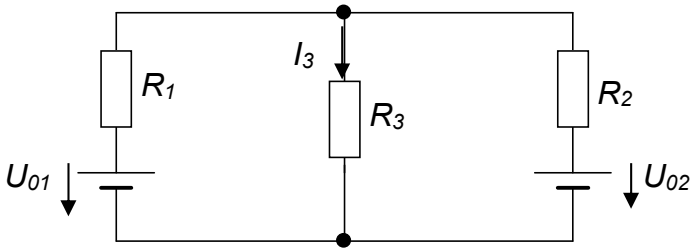
Schließlich werden alle Teilströme vorzeichenrichtig addiert.

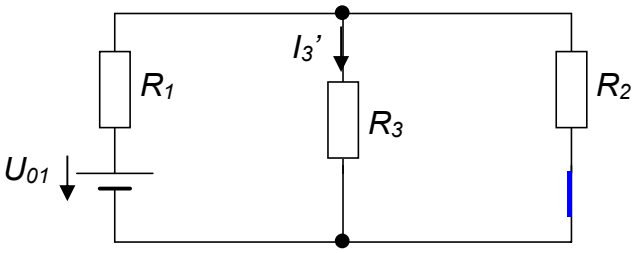
Anmerkung:
Wenn Quellen oder ihr Einfluss in einer elektrischen Schaltung nicht berücksichtigt werden sollen, wird immer dasselbe Verfahren angewendet (also nicht nur für das Überlagerungsverfahren):

- Ideale Spannungsquellen werden durch Kurzschlüsse ersetzt: Der Kurzschluss ist das einzig mögliche Element, das stets und unter allen Umständen eine Spannung von $U = 0$ aufweist, womit jeglicher energiemäßige Einfluss einer Spannungsquelle verhindert wird – eine ideale Spannungsquelle ist eine technische Spannungsquelle mit $R_i = 0 \rightarrow$ Kurzschluss.

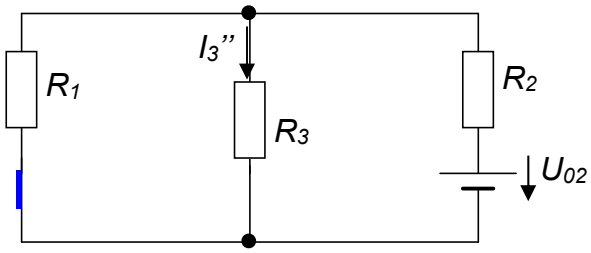
- Ideale Stromquellen werden durch Leerläufe ersetzt: Der Leerlauf ist das einzig mögliche Element, das stets und unter allen Umständen einen Strom von $I = 0$ aufweist, womit jeglicher energiemäßige Einfluss einer Stromquelle verhindert wird – eine ideale Stromquelle ist eine technische Stromquelle mit $R_i = \infty \rightarrow$ Leerlauf.

Beispiel: Wir nehmen an, dass der Strom I_3 gesucht ist.





Quelle 1 ist aktiv,
Quelle 2 durch Kurzschluss ersetzt



Quelle 2 ist aktiv,
Quelle 1 durch Kurzschluss ersetzt

$$I_3' = \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} \cdot \frac{U_{01}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}}$$

$$I_3'' = \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}} \cdot \frac{U_{02}}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}}}$$

$$I_3' = \frac{\frac{1}{R_3} \cdot U_{01}}{\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_1}{R_3}+1} = \frac{R_2 \cdot U_{01}}{R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}$$

$$I_3'' = \frac{R_1 \cdot U_{02}}{R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_1 + R_1 \cdot R_3}$$

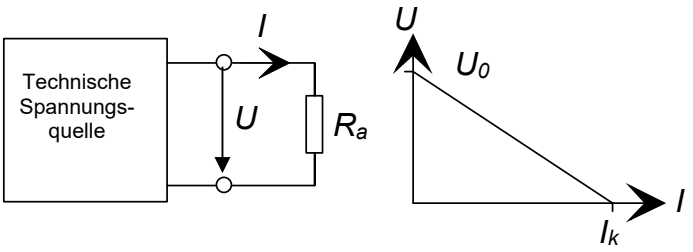
Beide Teilströme werden nun noch vorzeichenrichtig addiert:

$$I_3 = I_3' + I_3'' = \frac{R_2 \cdot U_{01} + R_1 \cdot U_{02}}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}$$

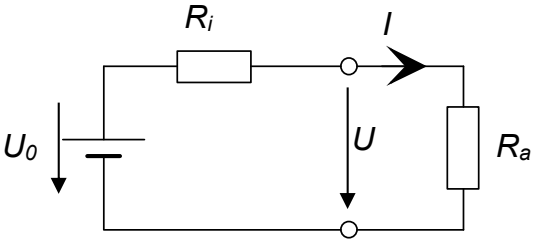
2.4.6 Verfahren der Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle

Wir wissen, dass eine technische Spannungsquelle (oder Stromquelle) an den Klemmen einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom aufweist (siehe 2.2.3 und 2.2.4). In diesem Falle ist an den Klemmen nur der Widerstand R_a angeschlossen.

Technische Spannungsquelle mit linearer *U-I* Kennlinie



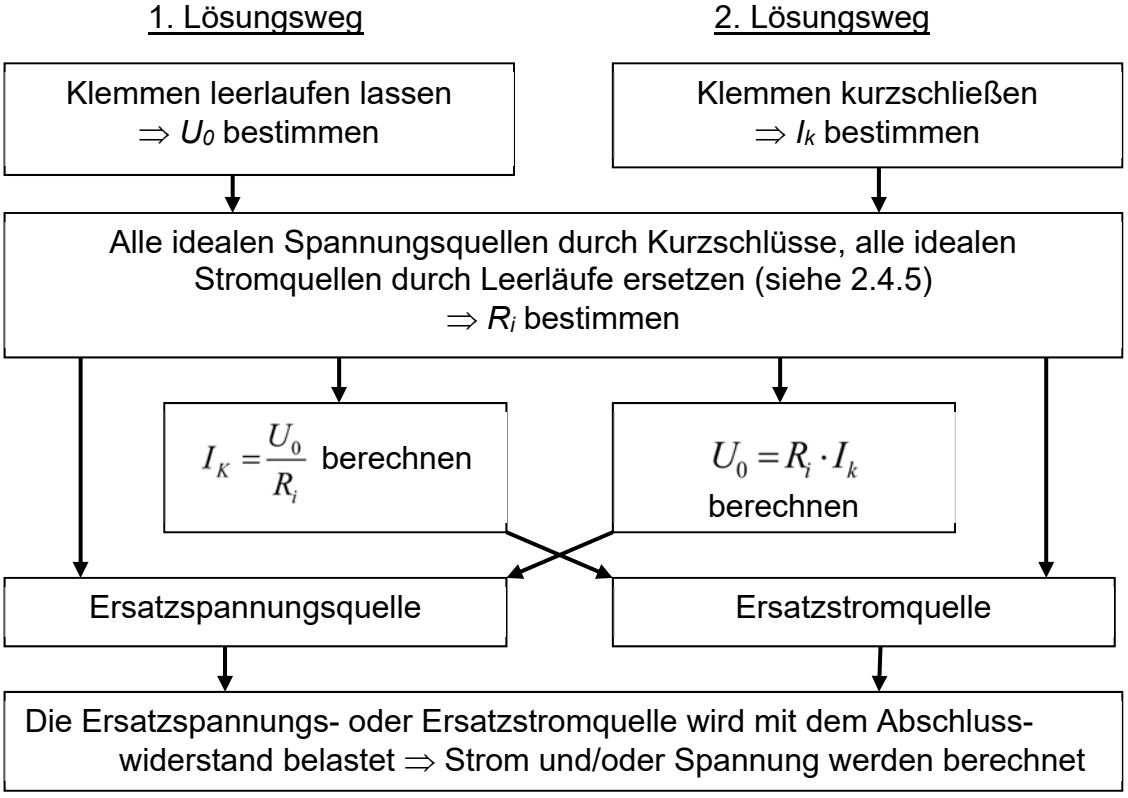
Schaltung der Ersatzspannungsquelle



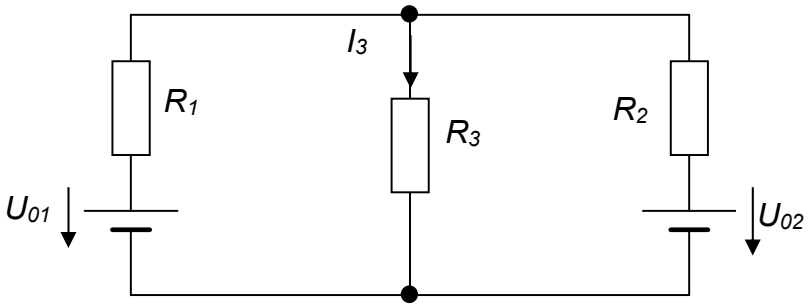
Der innere Aufbau der technischen Spannungsquelle ist dabei beliebig; das kann z.B. auch ein kompliziertes lineares Netzwerk sein.

Verfahren: Wir nehmen an, dass wir Strom und/oder Spannung an einem ganz bestimmten Widerstand des gegebenen Netzwerks berechnen wollen. Man betrachtet diesen Widerstand als Abschlusswiderstand R_a und fasst den gesamten Rest des Netzwerks als lineare elektrische Quelle auf, für die dann eine Ersatzschaltung zu suchen ist

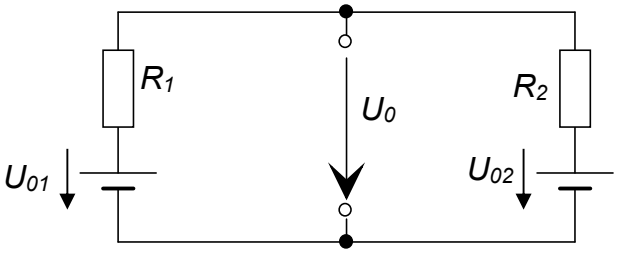
Bestimmung der Elemente der Ersatzschaltungen (Spannungs- oder Stromquelle):



Beispiel: $I_3 = ?$



1. Lösungsweg



U_0

$$(R_1+R_2)\cdot I'+U_{02}-U_{01}=0$$

$$I' = \frac{U_{01}-U_{02}}{R_1+R_2}$$

$$U_0 = R_2\cdot I'+U_{02}$$

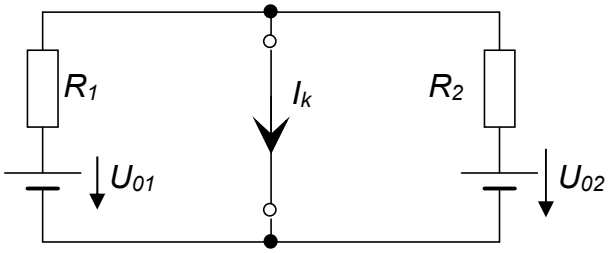
$$U_0 = \frac{R_2\cdot U_{01}-R_2\cdot U_{02}+(R_1+R_2)\cdot U_{02}}{R_1+R_2}$$

$$U_0 = \frac{R_2\cdot U_{01}+R_1\cdot U_{02}}{R_1+R_2}$$

R_i

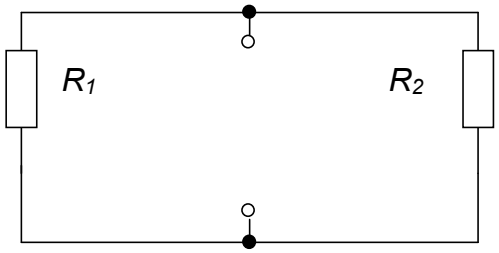
$$R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2} = R_i$$

2. Lösungsweg



I_k

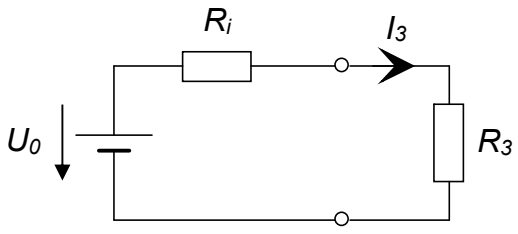
$$I_k = \frac{U_{01}}{R_1}+\frac{U_{02}}{R_2}$$



$$U_0 = R_i\cdot I_K$$

$$U_0 = \frac{R_2\cdot U_{01}+R_1\cdot U_{02}}{R_1+R_2}$$

Schließlich erhalten wir die Ersatzspannungsquelle, die mit dem Abschluss-widerstand R_3 belastet wird:



$$I_3 = \frac{U_0}{R_i + R_3} = \frac{R_2 \cdot U_{01} + R_1 \cdot U_{02}}{(R_1 + R_2) \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right)}$$

$$I_3 = \frac{R_2 \cdot U_{01} + R_1 \cdot U_{02}}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

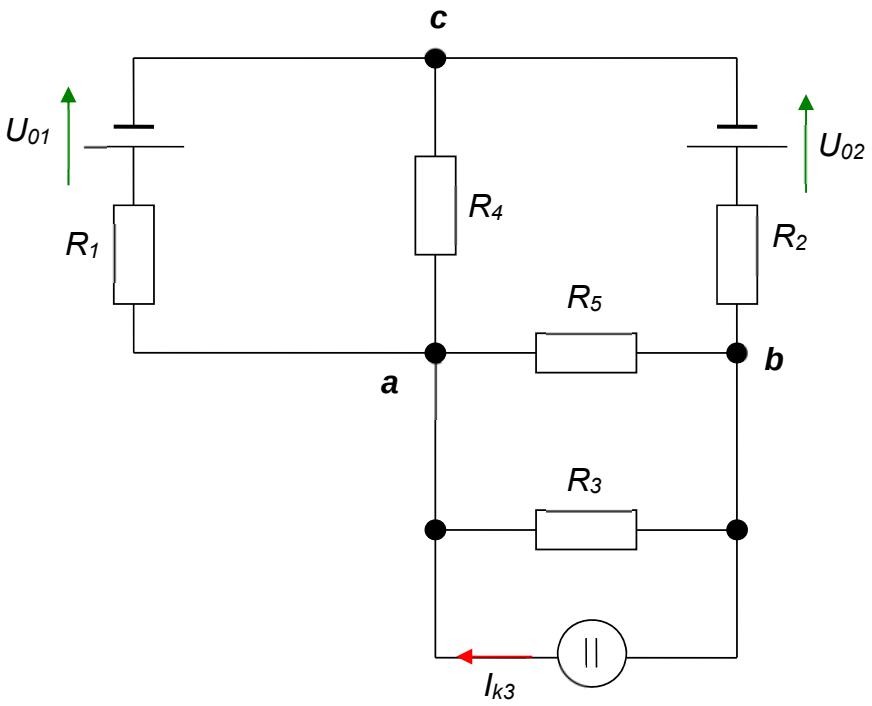
2.4.7 Maschenstromverfahren

Für dieses Verfahren werden nur noch die (z - k + 1) Maschengleichungen benötigt, keine Knotengleichungen mehr. Die Informationen aus den Knotengleichungen werden automatisch durch die Festlegung der Maschenströme berücksichtigt.

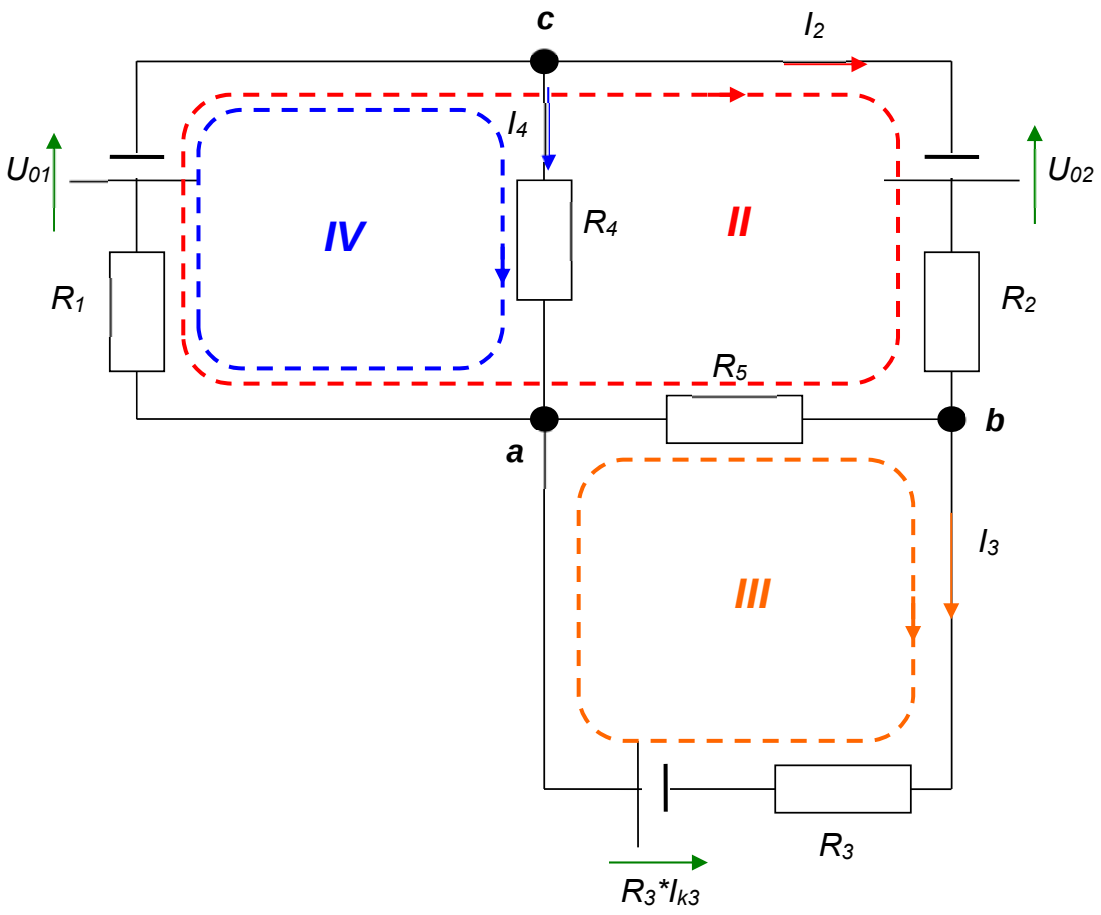
Zunächst müssen alle Stromquellen in äquivalente Ersatzspannungsquellen umgewandelt werden. Die Ströme in den Verbindungszweigen (siehe 2.4.4: Vollständiger Baum) nennt man **Maschenströme**.

Beispiel:

Ausgangsschaltung



Schaltung nach Umwandlung (enthält nur noch Spannungsquellen):



Vorgehensweise:

Zunächst wird ein Vollständiger Baum definiert, der alle Knoten des Netzwerks verbindet. Die Zweige, die nicht zum Vollständigen Baum gehören, sind die Verbindungszweige.

Jeder Maschenstrom durchfließt nun die ganze Masche. In den Verbindungszweigen fließt damit nur der betreffende Maschenstrom.

In den anderen Zweigen fließen mehrere Maschenströme. Diese Zweige sind Bestandteil des Vollständigen Baumes. Die Ströme in diesen Zweigen ergeben sich aus der Überlagerung der dortigen Maschenströme $\rightarrow$ $I_1 = -I_2 - I_4$, $I_5 = I_2 - I_3$

Masche II $\quad R_2 \cdot I_2 + R_5 \cdot (I_2 - I_3) + R_1 \cdot (I_2 + I_4) + U_{01} - U_{02} = 0$

Masche III $\quad R_5 \cdot (I_3 - I_2) + R_3 \cdot I_3 - R_3 \cdot I_{k3} = 0$

Masche IV $\quad R_4 \cdot I_4 + R_1 \cdot (I_4 + I_2) + U_{01} = 0$

Geordnetes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_5) & -R_5 & R_1 \\ -R_5 & (R_3+R_5) & 0 \\ R_1 & 0 & (R_1+R_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{02}-U_{01} \\ R_3 \cdot I_{k3} \\ -U_{01} \end{bmatrix}$$

Die Widerstandsmatrix ist immer symmetrisch zur Hauptdiagonalen, wenn Maschenumlaufsinn (II, III, IV) und Maschenstrom-Zählpfeil dieselbe Richtung haben.

Hauptdiagonale: **Summe der Widerstände**
(alle Widerstände in der betrachteten Masche)

Übrige Plätze: **Koppelwiderstände**
(Widerstände, die von den Maschenströmen I_μ und I_ν gemeinsam durchflossen werden)
- positiv, wenn die Maschenströme gleiche Richtung haben;
- negativ, wenn die Maschenströme unterschiedliche Richtung haben.

Ergebnisvektor: **Summe der Quellspannungen** in der betrachteten Masche
(mit Original-Vorzeichen, wenn der Spannungszählpfeil dem Maschenumlaufsinn entgegen gerichtet ist, sonst umgekehrtes Vorzeichen).

2.4.8 Knotenpotenzialverfahren

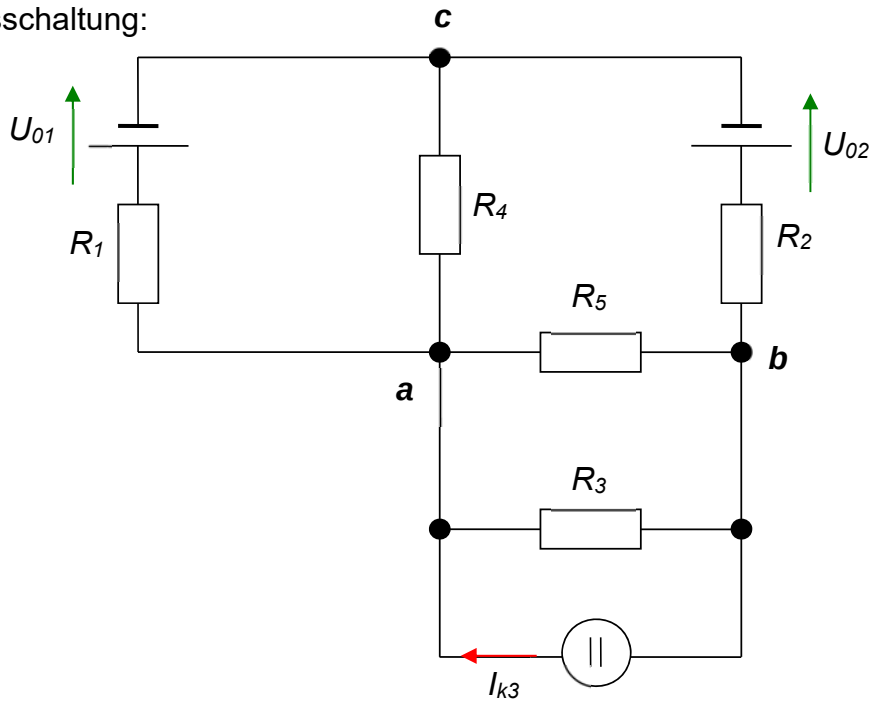
Für dieses Verfahren werden nur noch die (k – 1) Knotengleichungen benötigt, keine Maschengleichungen mehr. Die Informationen aus den Maschengleichungen werden automatisch durch die Festlegung der Knotenspannungen berücksichtigt. Dieses Verfahren ist also der genaue Gegensatz zum Maschenstromverfahren (2.4.7).

Zunächst müssen alle Spannungsquellen in äquivalente Ersatzstromquellen umgewandelt werden. Das Potenzial eines Knoten wird als **Bezugspotenzial** gewählt.

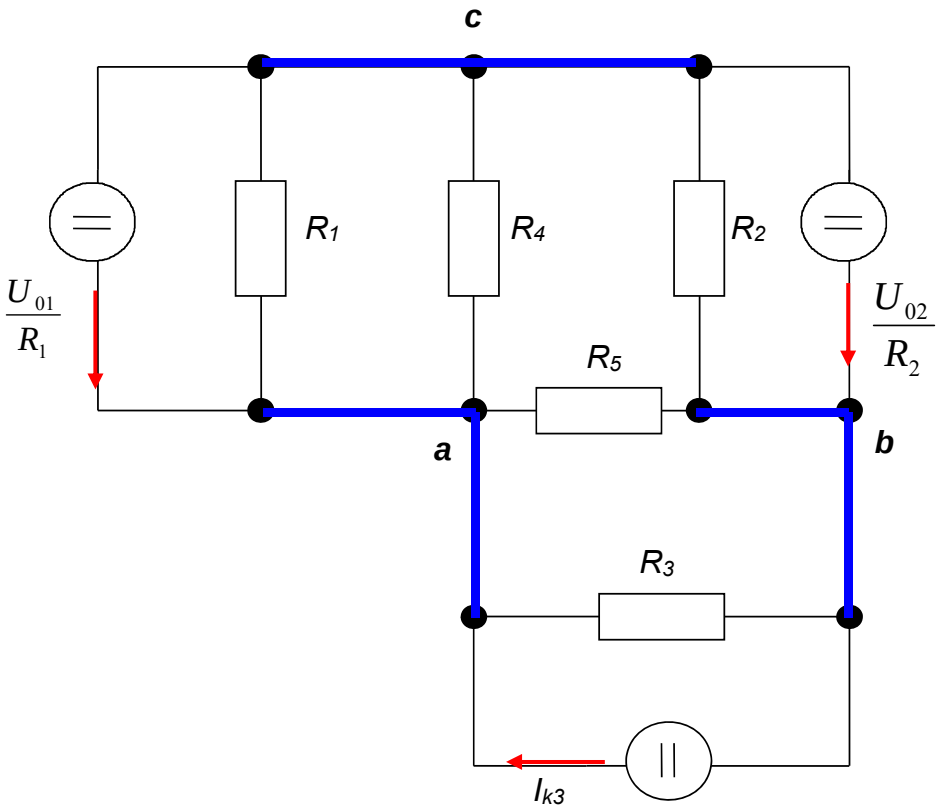
Zweckmäßig: - für das Bezugspotenzial wird keine Knotengleichung aufgestellt,
- an allen Knoten wird für die abfließenden Ströme I_{ab} die Zählpfeilrichtung positiv definiert (dies ist aber keine Notwendigkeit).

Beispiel:

Ausgangsschaltung:



Schaltung nach Umwandlung (enthält nur noch Stromquellen):



Vorgehensweise:

Für alle Knoten (mit Ausnahme des Knoten mit Bezugspotenzial) werden die Knotengleichungen aufgestellt

Hier: Knoten **a** ist als Bezugspotenzial gewählt.

Knoten **b**
$$\left(\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_3}\right)\cdot U_B+\frac{1}{R_2}\left(U_B-U_C\right)-\frac{U_{02}}{R_2}+I_{k3}=0$$

Knoten **c**
$$\frac{U_{01}}{R_1}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}\right)\cdot U_C+\frac{1}{R_2}\left(U_C-U_B\right)+\frac{U_{02}}{R_2}=0$$

Geordnetes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_2}\\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}\right)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}U_B\\U_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{U_{02}}{R_2}-I_{k3}\\ -\frac{U_{01}}{R_1}-\frac{U_{02}}{R_2}\end{bmatrix}$$

Die Leitwertsmatrix (besteht aus den elektrischen Leitwerten) ist immer symmetrisch zur Hauptdiagonalen, wenn alle von den Knoten abfließenden Ströme I_{ab} positiv gezählt werden und wenn für den Knoten mit Bezugspotenzial keine Knotengleichung aufgestellt wird.

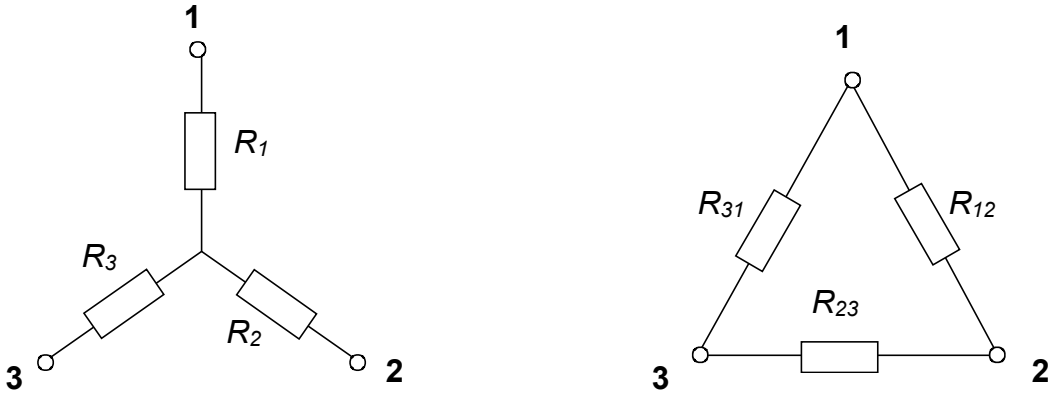
Hauptdiagonale: **Summe der Leitwerte**
(alle Leitwerte, die am betrachteten Knoten angeschlossen sind)

Übrige Plätze: **Koppelleitwerte**
(alle Leitwerte der Elemente, die die Knoten μ and ν verbinden)

Ergebnisvektor: **Summe der Quellströme**, die im betrachteten Knoten eingeprägt werden
(mit Original-Vorzeichen, wenn der Stromzählpfeil auf den Knoten hin gerichtet ist, sonst umgekehrtes Vorzeichen).

2.4.9 Stern – Dreieck-Umwandlung

Stern und Dreieck sind die beiden Grundschaltungen, die zwischen drei äußeren Klemmen aufgebaut werden können.



Ziel: Die beiden Schaltungen sollen so dimensioniert werden, dass sie sich nach außen hin gleich verhalten → **Äquivalenz**

Die Widerstände zwischen zwei entsprechenden Klemmen müssen jeweils gleich sein:

Widerstand zwischen den Klemmen	**Stern**	**Dreieck**	
1 und 2	$R_1 + R_2$	$= \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	(Gl. 1)
2 und 3	$R_2 + R_3$	$= \frac{R_{23} \cdot (R_{31} + R_{12})}{R_{23} + R_{31} + R_{12}}$	(Gl. 2)
3 und 1	$R_3 + R_1$	$= \frac{R_{31} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{31} + R_{12} + R_{23}}$	(Gl. 3)

Anmerkung: Jede Gleichung entsteht aus der vorhergehenden (auch die erste aus der letzten) durch zyklische Vertauschung der Indizes
$1 \rightarrow 2 \qquad 2 \rightarrow 3 \qquad 3 \rightarrow 1$

Nun stellen wir auf: (Gl. 1) - (Gl. 2) + (Gl. 3):

$$2 \cdot R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{23} + R_{12} \cdot R_{31} - R_{23} \cdot R_{31} - R_{23} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Umwandlung DREIECK → STERN:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

R_1 in der Stern- und R_{31}, R_{12} in der Dreieck-Schaltung sind an der Klemme 1 angeschlossen

R_2 in der Stern- und R_{12}, R_{23} in der Dreieck-Schaltung sind an der Klemme 2 angeschlossen

R_3 in der Stern- und R_{23}, R_{31} in der Dreieck-Schaltung sind an der Klemme 3 angeschlossen

Formal erhält man die Gleichungen für R_2 und R_3 aus der Gleichung für R_1 wieder durch zyklische Vertauschung der Indizes. Dabei ergibt sich stets derselbe Nenner.

Die Gleichungen zur Umwandlung in umgekehrter Richtung ergeben sich aus den oben hergeleiteten Beziehungen durch Auflösung nach R_{12}, R_{23}, R_{31}:

$$\frac{R_{12} + R_{23} + R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \cdot R_{12} = R_{12}$$

$$\frac{R_{31}}{R_{31}} \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{12}$$

$$\frac{R_{12}}{R_{31}} \cdot \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{12}$$

$$\frac{R_2}{R_3} \cdot R_1 \quad + \quad R_2 \quad + \quad R_1 \quad = R_{12}$$

Umwandlung STERN → DREIECK:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

R_{12} in der Dreieck- und R_1, R_2 in der Stern-Schaltung liegen zwischen den Klemmen 1 und 2

R_{23} in der Dreieck- und R_2, R_3 in der Stern-Schaltung liegen zwischen den Klemmen 2 und 3

R_{31} in der Dreieck- und R_3, R_1 in der Stern-Schaltung liegen zwischen den Klemmen 3 und 1

Formal erhält man die Gleichungen für R_{23} und R_{31} aus der Gleichung für R_{12} wiederum durch zyklische Vertauschung der Indizes.

2.4.10 Vergleich der unterschiedlichen Netzwerkanalyse-Verfahren

Die Knoten- und Maschenanalyse (2.4.4) ist das grundlegende Berechnungsverfahren. Mit diesem Verfahren können grundsätzlich alle Netzwerke behandelt werden, allerdings steigt für ein umfangreicheres Netzwerk die Anzahl der Knoten- und Maschengleichungen stark an. Damit kann auch der Rechenaufwand zu umfangreich und aufwändig werden

Es ist stets anzuraten, ein Netzwerk soweit wie möglich zu vereinfachen, bevor man mit der Berechnung beginnt. Wenn Widerstände (bzw. allgemein: Elemente) nicht einfach durch die Beziehungen für Parallel- und Reihenschaltungen (2.4.1 und 2.4.2) zusammengefasst werden können, kann manchmal die Stern-Dreieck-Umwandlung (2.4.9) hilfreich sein.

Das Überlagerungsverfahren (2.4.5) ist nur für lineare Netzwerke anwendbar. Es ist bequem, wenn die Netzwerke nur wenig Quellen aufweisen, und wenn die Wirkung einer einzelnen Quelle einfach berechnet werden kann. Neben der hier gezeigten Anwendung ist das Überlagerungsverfahren (Superposition) auch in vielen anderen Gebieten der Elektrotechnik von Bedeutung.

Maschenstromverfahren (2.4.7) und Knotenpotenzialverfahren (2.4.8) erlauben eine Netzwerkanalyse mit deutlich weniger Gleichungen. Der Nachteil liegt darin, dass üblicherweise zu Beginn einige Quellen umgewandelt werden müssen: das Maschenstromverfahren erlaubt keine Stromquellen in den Netzwerken, das Knotenpotenzialverfahren keine Spannungsquellen. Welches Verfahren sinnvoller ist, hängt also von der Fallstudie ab: Weist die Ausgangsschaltung mehr Spannungs- oder mehr Stromquellen auf? Werden als Ergebnis Spannungen oder Ströme gefordert?

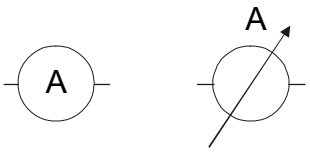
Das Verfahren mit Ersatzspannungsquelle oder Ersatzstromquelle (2.4.6) ist dann sinnvoll, wenn Spannung und/oder Strom nur in einem bestimmten Zweig der Schaltung berechnet werden sollen (die Spannungen und Ströme in den übrigen Zweigen sind nicht von Bedeutung; sie müssen dann auch nicht berechnet werden).

2.5 Messung von Strom, Spannung, Widerstand und Leistung

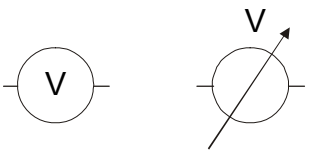
In diesem Kapitel sollen nur einige grundlegende Sachverhalte und Anmerkungen dargestellt werden, da die Messtechnik für alle Bereiche der Elektrotechnik sehr wichtig ist. Im Modul „Messtechnik“ werden noch viel mehr Informationen und Hintergründe zu messtechnischen Verfahren und Schaltungen vermittelt.

2.5.1 Grundschaltungen

Amperemeter



Voltmeter



Die Belastung durch das Messinstrument selbst sollte das Verhalten der elektrischen Schaltung nicht merklich beeinflussen. Daraus können wir die folgenden Bedingungen ableiten:

$R_A << R_i + R_a$ $\qquad$ $R_V >> R_a$

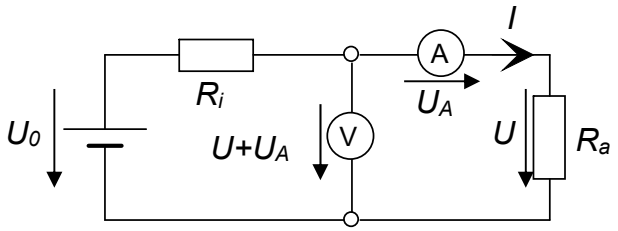
Typische Werte (nur als Beispiel):

R_A = 50 … 500 mΩ
im 10 … 1 A - Messbereich

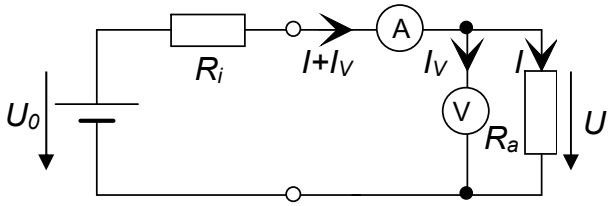
R_V = 10 MΩ
im 100 V – Messbereich
(Digital-Messgeräte)

Es gibt die folgenden zwei grundsätzlichen Möglichkeiten, in einer elektrischen Schaltung an einem Lastwiderstand gleichzeitig Strom und Spannung zu messen:

Stromrichtiges Messen
für hochohmige Lastwiderstände



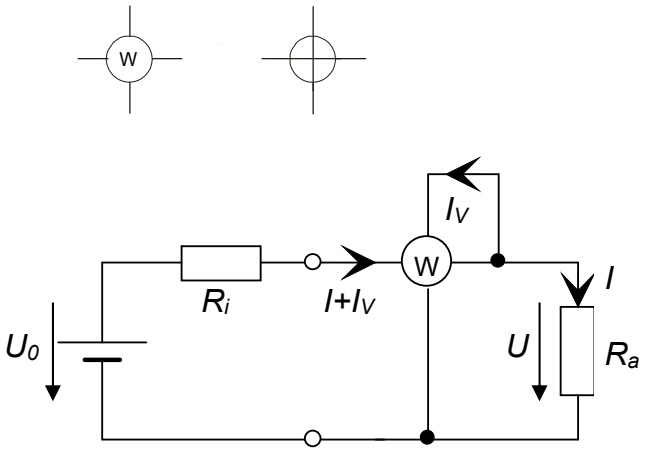
Spannungsrichtiges Messen
für niederohmige Lastwiderstände



$U_A << U$ für $R_a >> R_A$ $\qquad$ $I_V << I$ für $R_a << R_V$

Anmerkung:
Moderne Voltmeter (Multimeter) besitzen einen vergleichsweise hohen Wert des Voltmeter-Widerstands R_V, so dass üblicherweise die Bedingung für das spannungsrichtige Messen ausreichend erfüllt ist.

Ohmmeter = Amperemeter mit einer eingebauten Spannungsquelle
Wattmeter



Multiplizierendes Messwerk mit 4 Anschlüssen:
- Strompfad: kleiner Widerstand
- Spannungspfad: hoher Widerstand

Achtung:
Es darf nicht überschritten werden:
- sowohl der maximale Strom im Strompfad
- als auch die maximale Spannung im Spannungspfad.

Genauigkeitsklassen: 0,1 0,2 0,5 1 Präzisionsmessgeräte 1,5 2,5 5 Betriebsmessgeräte

Der Zahlenwert hat folgende Bedeutung:

Relativer Fehler in Prozent bezogen auf den Messbereichsendwert

Beispiel:
Für ein “Klasse 1” – Voltmeter beträgt der maximale Fehler im 100 V – Messbereich also relativ 1%, d.h. 1 V absolut. Dieser absolute Wert von 1 V ist nun auch gültig, wenn z.B. nur 5 V im 100 V – Messbereich angezeigt werden; der relative Fehler beträgt dann aber 20%. Aus diesem Grunde sollten Messgeräte stets im niedrigstmöglichen Messbereich betrieben werden. Dies ist besonders auch für Digitalanzeigen wichtig, aus denen oft der gewählte Messbereich nicht direkt ersichtlich ist.

2.5.2 Messbereichserweiterungen

Das Anzeigeinstrument (Messwerk) eines Ampere- oder Voltmeters benötigt Leistung für einen Ausschlag; es hat also einen definierten Widerstand R. Spannung und Strom liegen gleichzeitig an den Klemmen:

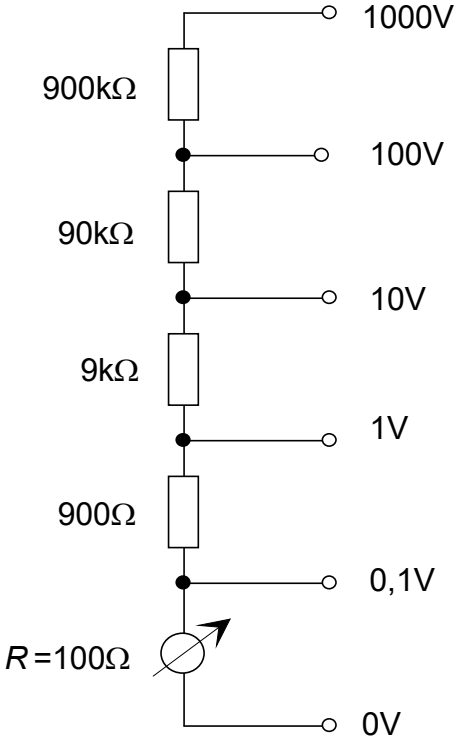
$\Rightarrow$ Das Anzeigeinstrument kann sowohl als Ampere- wie auch als Voltmeter verwendet werden.

Beispiel: Ein Anzeigeinstrument hat einen Widerstand von $R = 100\ \Omega$.
Sein Vollausschlag tritt auf bei einem Strom von $I = 1\text{mA}$, d.h. $U = 0{,}1\text{V}$

Wir wollen nun die möglichen Messbereiche eines Voltmeters und eines Amperemeters erweitern. Das kann mit zusätzlichen Widerständen erreicht werden, die entweder in Reihe oder parallel zum Anzeigeinstrument geschaltet werden.

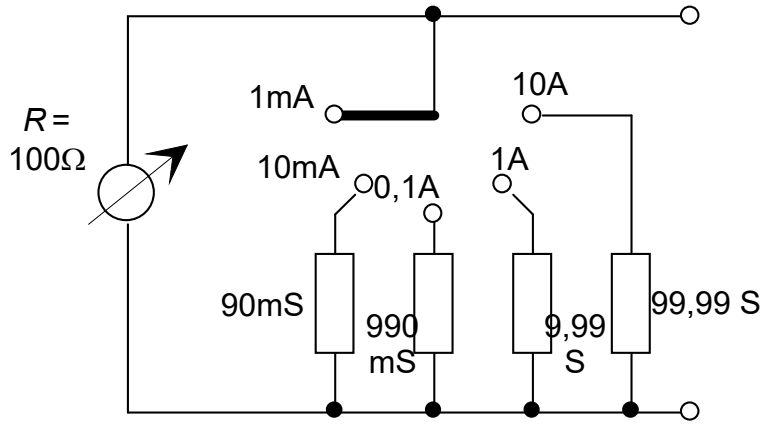
Voltmeter

Erweiterung des Messbereichs durch Vorwiderstände (in Reihe)



Amperemeter

Erweiterung des Messbereichs durch Nebenwiderstände (parallel)



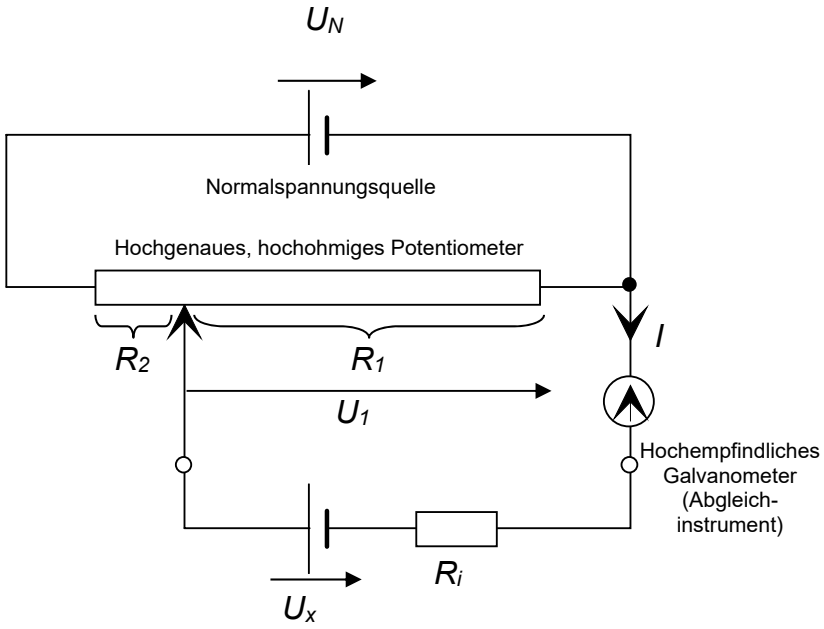
Der Voltmeter-Widerstand wird häufig wie folgt angegeben:

$$\frac{\text{Widerstand}}{\text{Endwert des gewählten Messbereichs}} = ... \frac{k\Omega}{V} \qquad \textit{zum Beispiel:} \quad \frac{100\ k\Omega}{V}$$

2.5.3 Kompensationsmessverfahren

Mit dem Kompensationsmessverfahren soll der (störende) Einfluss einer elektrischen Größe auf die Messung einer anderen vermieden werden. So beeinflusst beispielsweise ein in einem Stromkreis fließender Strom natürlich die dort gemessene Spannung. Dies ist in einigen Fällen nicht tolerierbar. Wir wollen hier eine stromfreie Messung der Spannung erreichen.

Beispiele sind:
- leistungsschwache Quellen (großer Innenwiderstand R_i)
- Fernmessungen (großer Widerstand der Leitungen)
- Präzisionsmessungen.



$I = 0$, wenn

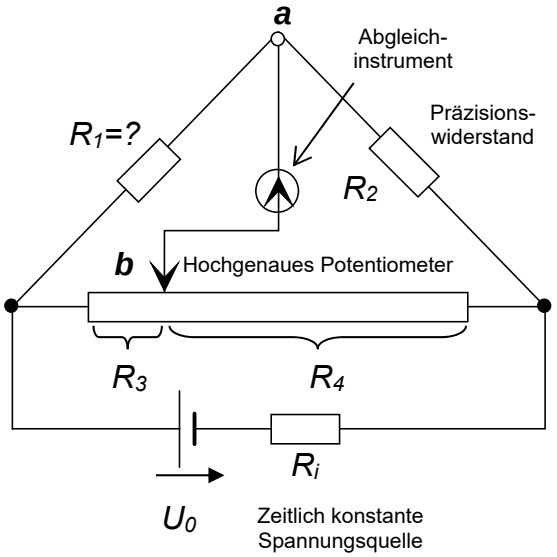
$$U_x = U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_N$$

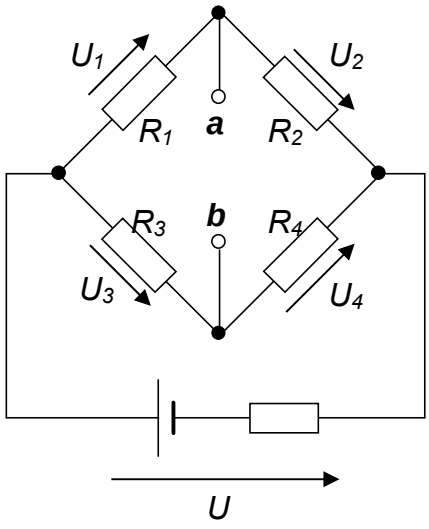
Wegen $I = 0$ (Abgleich) spielen die Widerstände in der unteren Masche (R_i, Leitungen, etc.) keine Rolle, d.h. sie müssen bei der Messung nicht berücksichtigt werden.

2.5.4 Brückenschaltungen

Ein vergleichbares Verfahren wird im Falle von Brückenschaltungen verwendet.

Beispiel: Wheatstone – Brücke für die Präzisionsmessung von Widerständen.





Wenn die Brücke abgeglichen ist, fließt über das Abgleichinstrument (Amperemeter) kein Strom. Die beiden Klemmen **a** und **b** haben dann das gleiche Potenzial; zwischen ihnen existiert keine Spannung. Dies würde auch so bleiben, wenn man in diesem Zustand das Amperemeter aus der Schaltung herausnimmt (rechtes Bild). Beide Spannungsteiler R_1, R_2 und R_3, R_4 sind daher gleichermaßen eingestellt.

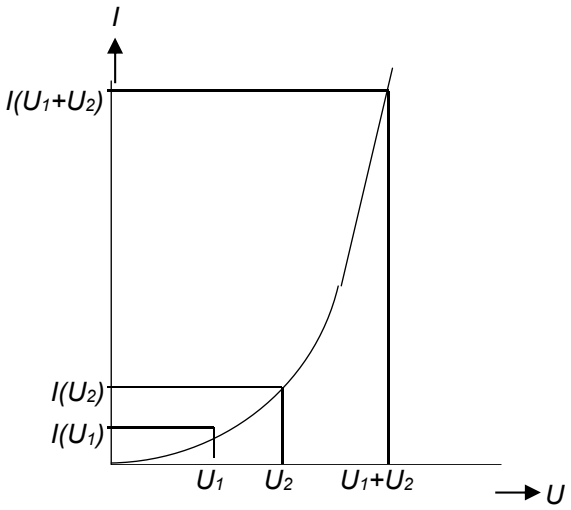
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_1 = \frac{R_3}{R_4} \cdot R_2}$$

2.6 Netzwerke mit nichtlinearen Bauelementen

Für nichtlineare Bauelemente ist das Überlagerungsprinzip nicht gültig:

$I(U_1 + U_2) \neq I(U_1) + I(U_2)$

Beispiele:
Dioden, Transistoren, Varistoren
Gasentladungsstrecken,
Funkenstrecken, etc.



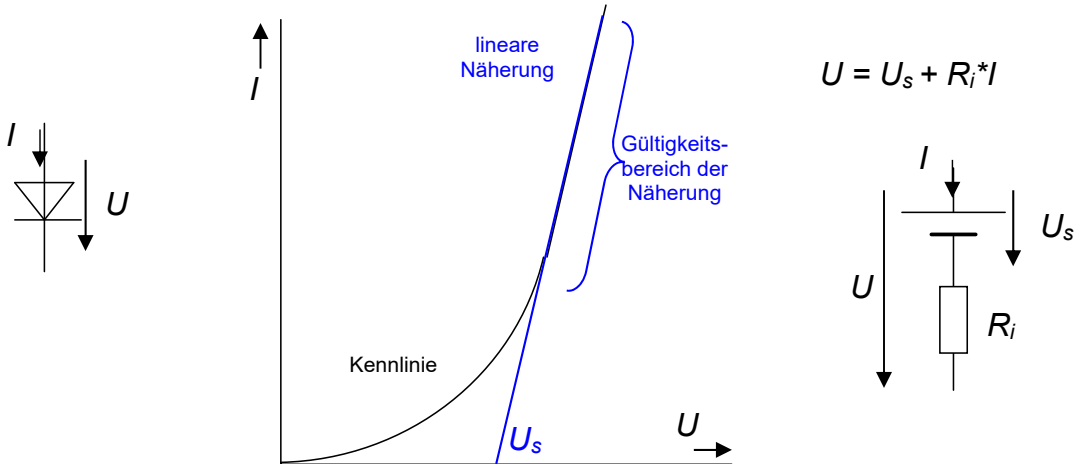
Es gibt zwei grundlegende Verfahren, um Netzwerke mit nichtlinearen Bauelementen zu behandeln: (1) die nichtlinearen Bauelemente können in einem bestimmten Bereich linearisiert werden oder (2) eine graphische Arbeitspunktbestimmung.

2.6.1 Linearisierung

Voraussetzung: Der Arbeitspunkt ist näherungsweise bekannt. Die Kennlinie des nichtlinearen Bauelements ist in diesem Bereich annähernd linear.

Verfahren: Die nichtlineare Kennlinie wird im Bereich des Arbeitspunktes durch eine Gerade angenähert, also „ersetzt“ (siehe dazu auch Abschnitt 2.1.3: Linearisierung der Kennlinie *R(T)*. Für genauere Untersuchungen ist auch hier die Näherung durch eine Parabel grundsätzlich möglich).

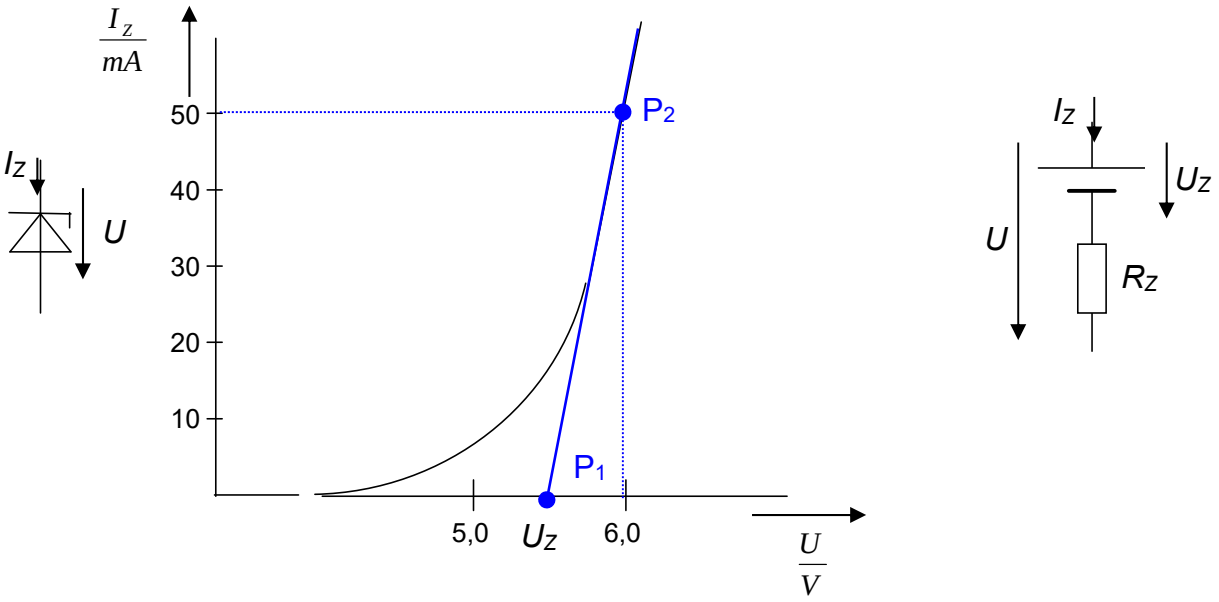
Beispiel: Diode



Wir ersetzen die Diode durch die Ersatzschaltung einer technischen Spannungsquelle (ideale Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i). U_s als Schleusenspannung der Diode ist identisch mit der Leerlaufspannung der Ersatzspannungsquelle.

Numerisches Beispiel: Zener-Diode (Z-Diode) ZPD 5

Anmerkung:
Eine Zener-Diode ist eine Diode mit definiertem Verhalten auch in Sperrrichtung (festgelegte Durchbruchspannung = Zener-Spannung)



Wir nehmen an, dass die Näherung und damit die Ersatzschaltung das Verhalten der Z-Diode für I_Z > 10 mA hinreichend genau beschreiben (völlig falsch für I_Z < 0 !)

Gleichung für Näherungsgerade und Ersatzschaltung:

2 Punkte auf der Näherungsgeraden: $U = U_Z + R_Z \cdot I_Z$

P1: $I_Z = 0$ $U = 5{,}5$ V $\rightarrow$ $\underline{U_Z = 5{,}5\ V}$

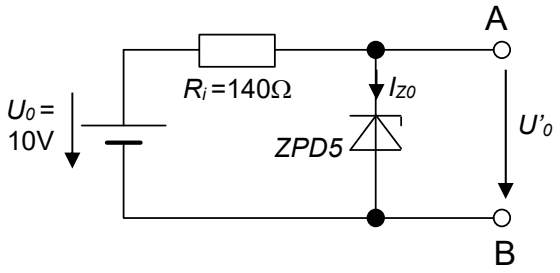
P2: $I_Z = 50$ mA $U = 6{,}0$ V $\rightarrow$ $6{,}0V = 5{,}5V + R_Z \cdot 50\,mA$

$\underline{R_Z = 10\ \Omega}$

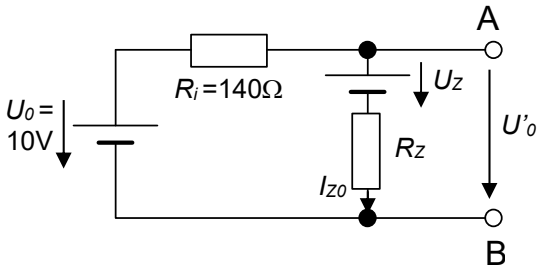
Wir setzen das numerische Beispiel fort und untersuchen das Verhalten der nachstehenden Schaltung mit einer ZPD 5 mit und ohne Belastung.

Schaltung ohne Belastung:

Originalschaltung



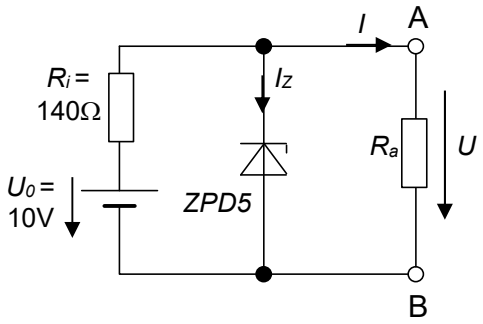
Ersatzschaltung

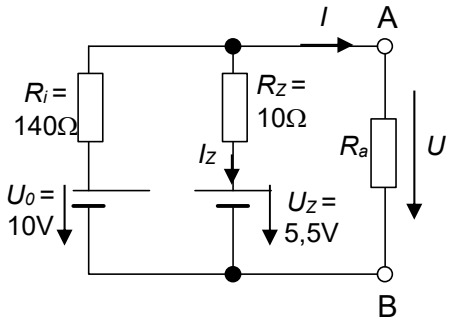


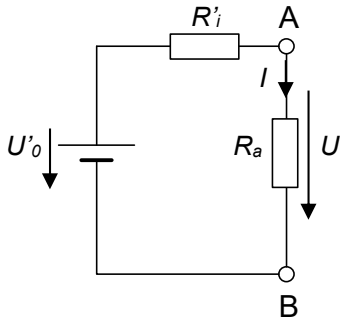
$$I_{Z0} = \frac{U_0 - U_Z}{R_i + R_Z} = \frac{10V - 5.5V}{140\Omega + 10\Omega} = \frac{4.5V}{150\Omega} = 30mA$$

Da I_Z > 10mA, ist die Ersatzschaltung zutreffend bzw. sie beschreibt das Verhalten korrekt (Gegenbeispiel: R_i = 2,2kΩ)

Verhalten der Schaltung bei Belastung:







Originalschaltung | Z-Diode ersetzt durch Spannungsquelle | Spannungsquellen-Ersatzschaltung

$$U_0^{'} = U_Z + R_Z \cdot I_{Z0} = 5{,}5V + 10\Omega \cdot 30mA = 5{,}8V$$

$$R_i^{'} = \frac{R_i \cdot R_Z}{R_i + R_Z} = \frac{140\Omega \cdot 10\Omega}{140\Omega + 10\Omega} = 9{,}33\Omega$$

Die Kennlinien für diese Schaltung können wie folgt beschrieben werden:

- ohne Zener-Diode ZPD 5: $U = U_0 - R_i \cdot I = 10V - 140\Omega \cdot I$
- mit Zener-Diode ZPD 5 $U = U_0^{'} - R_i^{'} \cdot I = 5{,}8V - 9{,}33\Omega \cdot I$

Graphische Beschreibung: siehe Vorlesung !

Schließlich bestimmen wir noch den Gültigkeitsbereich für die Ersatzschaltung mit ZPD 5:

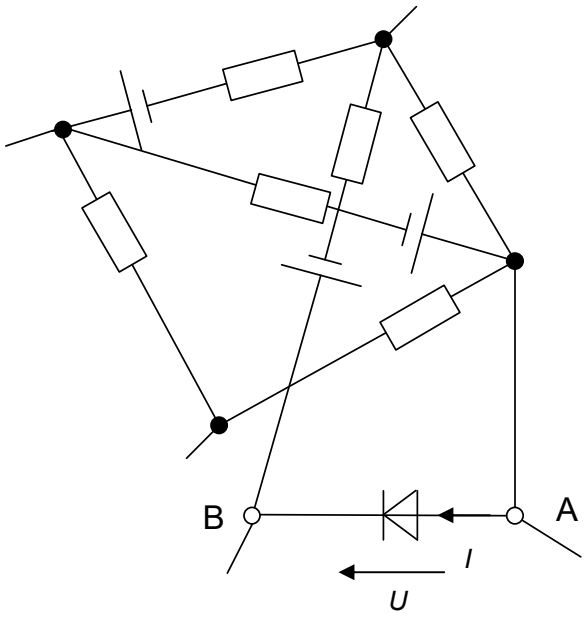
$$I_Z > 10\,mA$$

$$U = U_Z + R_Z \cdot I_Z \quad \Rightarrow \quad U > 5{,}5V + 10\Omega \cdot 10\,mA \quad \Rightarrow \quad U > 5{,}6V$$

$$I = \frac{U_0' - U}{R_i'} \quad \Rightarrow \quad I < \frac{5{,}8V - 5{,}6V}{9{,}33\Omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{I < 21{,}5mA}$$

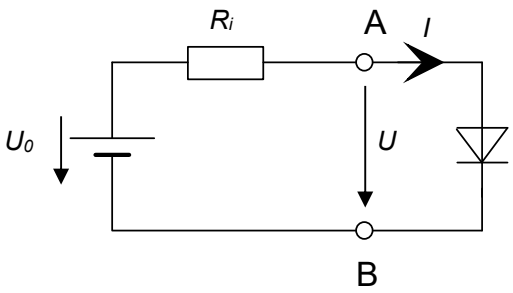
2.6.2 Graphische Arbeitspunktbestimmung

Voraussetzung: Ein beliebig kompliziertes Netzwerk mit einer beliebigen Anzahl von linearen Bauelementen enthält auch **genau ein** nichtlineares Bauelement (existiert noch ein zweites nichtlineares Bauelement, ist dieses Verfahren nicht möglich).



Wir wenden das bekannte Verfahren einer Ersatzspannungsquelle (oder Ersatzstromquelle) an:

- Das nichtlineare Bauelement wird herausgenommen.
- Für den Rest der Schaltung wird die Ersatzspannungsquelle bestimmt.
- Die Ersatzspannungsquelle wird mit dem nichtlinearen Bauelement belastet.

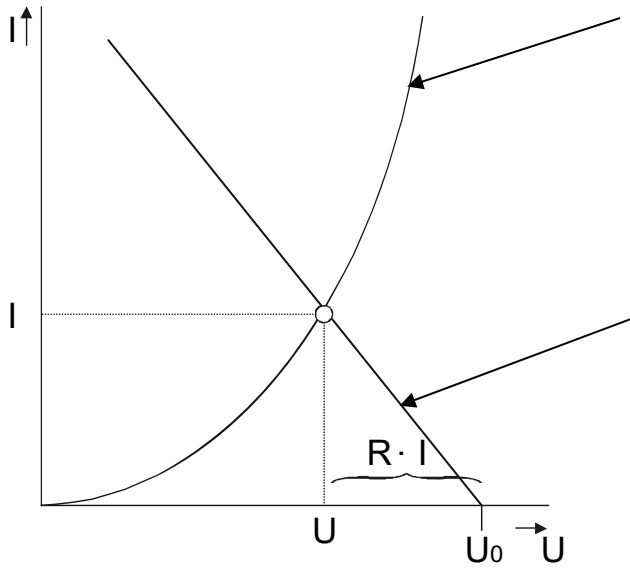


Ersatzspannungsquelle mit Last:

$$U_0 = R_i \cdot I + U$$

$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

I(U) – Kennlinie des nichtlinearen Bauelements liegt in graphischer Form vor.



Kurve 1:
Diese Beziehung zwischen *U* und *I* gilt immer, unabhängig, an welche Quelle das nichtlineare Bauelement angeschlossen ist

⇒ Festlegung durch das nichtlineare Bauelement.

Kurve 2:
Diese Beziehung zwischen *U* und *I* gilt immer, unabhängig, welche Last an die Quelle angeschlossen ist

⇒ Festlegung durch die Quelle

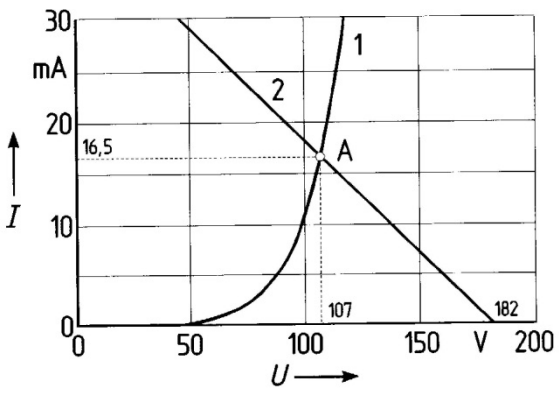
$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

(Ersatzspannungsquelle mit Last)

Es existieren also zwei Zusammenhänge zwischen *U* und *I*, die gleichzeitig erfüllt sein müssen, sodass die Koordinaten des Schnittpunkts die Lösung darstellen.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass der Arbeitspunkt nicht bereits näherungsweise vorab bekannt sein muss (siehe das Problem des Gültigkeitsbereichs beim Verfahren der Linearisierung).
Der Nachteil des Verfahrens ist, dass es nur für Schaltungen mit nur einem nichtlinearen Bauelement angewendet werden kann.

Zusätzliches numerisches Beispiel: Koordinaten für den Arbeitspunkt (Schnittpunkt) [1]:



Kurve 1:
Nichtlineares Bauelement

Kurve 2:
Ersatzspannungsquelle mit U_0 = 182V, R_i = 4,55kΩ

⇒ $U = 182V - 4{,}55k\Omega \cdot I$

Schnittpunkt:

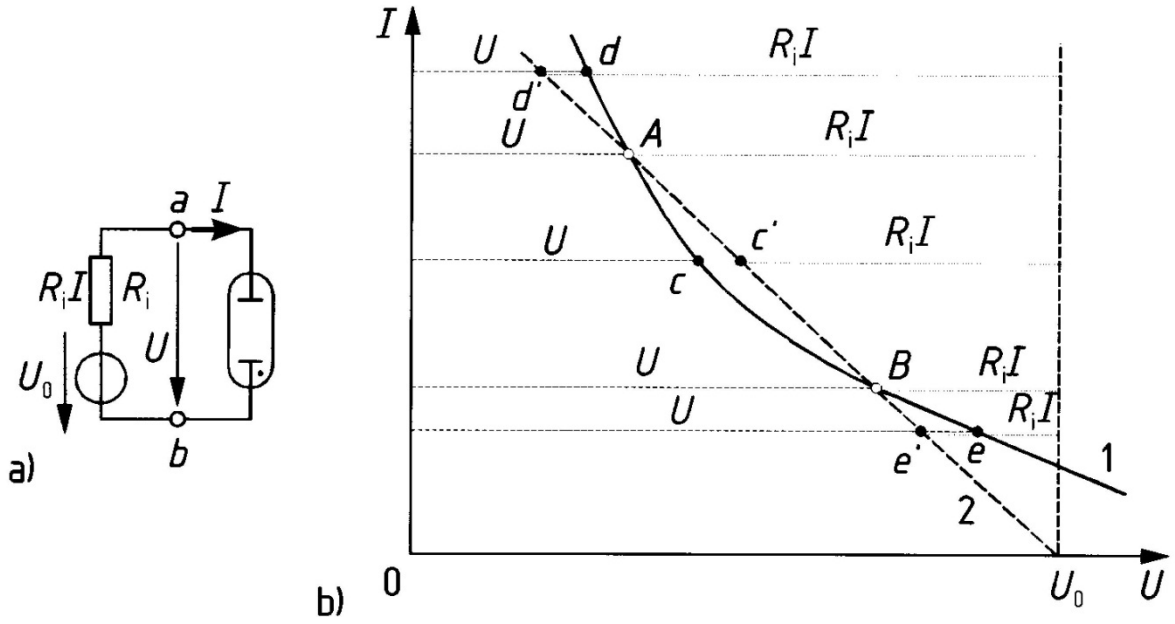
U = 107V, I = 16,5mA

2.6.3 Stabilitätsbetrachtungen

Dazu benutzen wir das Verfahren der graphischen Arbeitspunktbestimmung.

Es gibt Anordnungen, bei denen trotz abnehmender Spannung der Strom weiter zunimmt (Beispiele: Gasentladungsstrecken, Funkenstrecken, NTC-Widerstände). In diesen Fällen kann eine Stabilisierung erforderlich sein, z.B. durch einen in Reihe geschalteten Widerstand.

Beispiel [1]:



Kurve 1: *I(U)*- Kennlinie der Gasentladungsstrecke
Kurve 2: Arbeitsgerade für die Ersatzspannungsquelle U_0, R_i

Punkt B (instabil):

1) Wenn sich der Strom *I* geringfügig verringert (B → e, e'), nimmt die Spannung an der Entladungsstrecke stärker zu (e), als der Spannungsabfall *R·I* innerhalb der Spannungsquelle abnimmt (e'):

$$U(e) + R \cdot I(e') > U_0$$

Die Schaltung benötigt eine höhere Spannung, als ihr die Spannungsquelle liefert → **Bewegung weg von B** → Strom nimmt weiter ab, die Entladung erlischt !

2) Wenn sich der Strom *I* geringfügig erhöht (B $\rightarrow$ c, c'), nimmt die Spannung an der Entladungsstrecke stärker ab (c), als der Spannungsabfall $R \cdot I$ innerhalb der Spannungsquelle zunimmt (c'):

$$U(c) + R \cdot I(c') < U_0$$

Dies führt zu einer weiteren Stromzunahme, bis Punkt A erreicht ist $\rightarrow$
Bewegung weg von B $\rightarrow$ Punkt A

Punkt A (stabil):

1) Wenn sich der Strom *I* geringfügig erhöht (A $\rightarrow$ d, d'), nimmt der Spannungsabfall $R \cdot I$ stärker zu (d'), als die Spannung an der Entladungsstrecke abnimmt (d):

$$U(d) + R \cdot I(d') > U_0$$

Die Schaltung benötigt eine höhere Spannung, als ihr die Spannungsquelle liefert
$\rightarrow$ **Rückkehr zu A**

2) Wenn sich der Strom *I* geringfügig verringert (A $\rightarrow$ c, c'), nimmt der Spannungsabfall $R \cdot I$ stärker ab (c'), als die Spannung an der Entladungsstrecke zunimmt (c):

$$U(c) + R \cdot I(c') < U_0$$

Dies führt zu einer Stromzunahme, bis Punkt A wieder erreicht ist $\rightarrow$
Rückkehr zu A

Wenn wir diese Ergebnisse benutzen, können wir schließlich die Stabilitätsbedingungen für das Beispiel formulieren. Stabilität ist erreicht:

- wenn eine Zunahme des Stroms auch zu einer Zunahme der Summenspannung $U + R \cdot I$ führt (zu mehr als U_0);

- wenn eine Abnahme des Stroms auch zu einer Abnahme der Summenspannung $U + R \cdot I$ führt (zu weniger als U_0).

$$\frac{d\left(U + R \cdot I\right)}{dI} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\frac{dU}{dI} + R > 0}$$

$$R > -\frac{dU}{dI} \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{R} < -\frac{dI}{dU}$$

Für einen stabilen Arbeitspunkt muss also die (fallende) Kennlinie des nichtlinearen Bauelements im gegebenen *I-U-D*iagramm dort steiler sein als die (steigende) Kennlinie der Quelle (Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle).

3. Elektrostatisches Feld

3.1 Ladungen als Ursache des elektrischen Feldes

3.1.1 Wirkungen von Ladungen

Wir greifen hier wieder die Beobachtung aus Abschnitt 1.3 auf: Aufladung durch Reibung.

Bei Isolatoren gibt es welche, zu denen die Elektronen eine größere Affinität haben (z.B. Hartgummi) als zu anderen (z.B. die Haare eines Katzenfells). Bringt man durch Reibung zwei Materialien unterschiedlicher Elektronenaffinität in innigen Kontakt, so wandern Elektronen von dem einen Isolator zum anderen. Bei dem Isolator mit geringerer Elektronenaffinität bleiben positive Ionen zurück.

Berührungselektrische Spannungsreihe (triboelectric series)

Sehr trockene Hand	Positiv (Geringe Elektronenaffinität)
Leder	
Glas	
Haare	
Wolle	
Fell	
Seide	
Papier	
Baumwolle	
Hartgummi	
Polyester	
PVC	Negativ (hohe Elektronenaffinität)

Reibt man ein Material mit einem in der Liste darunterliegenden Material, lädt sich das in der Liste weiter obenstehende Material positiv auf (gibt Elektronen ab), das weiter unten angeführte negativ (nimmt Elektronen auf). Je weiter die Materialien voneinander entfernt sind, umso stärker ist die Aufladung

Beispiel 1: Wenn ein Hartgummistab mit Fell gerieben wird, lädt sich das Hartgummi negativ auf und das Fell wird positiv.

Beim Reiben werden also den Atomen eines Stoffes – hier dem Fell – viele Elektronen entzogen. Ihre Ansammlung heißt „negative Ladung". Sie befindet sich dann auf dem Hartgummistab. Im Fell herrscht jetzt Elektronenmangel. Die übrig gebliebenen Protonen ohne Partner bewirken die „positive Ladung".

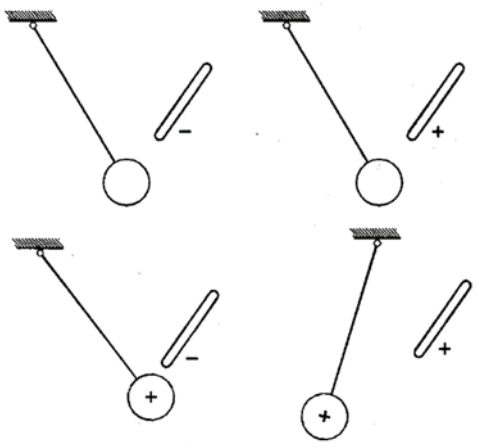
Beispiel 2: Wenn ein Glasstab mit Seide gerieben wird, lädt sich das Glas positiv auf und die Seide entsprechend negativ. Einige Elektronen des Glases wurden durch das Reiben auf die Seide übertragen.

Reibt man also eine Glasstange mit einem Wolllappen oder einem Stück Fell, so kann man die Beobachtung machen, dass diese Glasstange danach leichte Gegenstände

wie Papierschnitzel oder Federn anzieht. Der die geladenen Stäbe umgebende Raum ist durch die Anwesenheit der Ladungen in einen „besonderen Zustand“ versetzt worden. Er hat die physikalische Eigenschaft, auf bestimmte Körper Kräfte auszuüben, die diese auf die Stäbe hin oder von ihnen wegtreibt. Einen Raum mit besonderen Eigenschaften bezeichnet man in der Physik als Feld.

Feststellung: Elektrisch geladene Körper sind von einem elektrischen Feld umgeben.

Dieses Feld ist auf Grund der beschriebenen Wirkungen ein Kraftfeld. In dem nächsten Bild ist nun eine Versuchsanordnung gezeigt, mit der wir einige grundsätzliche Beobachtungen machen können. An einem dünnen, isolierenden Faden wird ein außen metallisiertes, sehr leichtes Kügelchen aufgehängt. In dem oberen Teilbild ist diese Kugel ungeladen, das heißt neutral. Im unteren Teilbild ist die Kugel mit einer positiven Ladung geladen.



Bringt man nun obigen Glasstab (positiv geladen) in die Nähe der ungeladenen Kugel, so beobachtet man, dass sie von dem Stab angezogen wird. Das Gleiche erreicht man durch einen mit einem Fell geriebenen Hartgummistab (negativ geladen). Wir berühren jetzt die Kugel mit einem der geladenen Stäbe und stellen fest, dass sie jetzt von dem jeweiligen Stab, von dem sie berührt wurde, abgestoßen, von dem jeweils anderen Stab dagegen angezogen wird.

Während die Anziehung des ungeladenen Kügelchens erst später in den Abschnitten über Influenz und Polarisation genau erklärt werden kann, ist die Erklärung für die zweite Beobachtung mit der geladenen Kugel nicht schwierig:

Beim Berühren der Kugel mit einem Stab fließt ein Teil der elektrischen Ladung dieses Stabes auf die Kugel. Die Kugel trägt dann die Ladung der gleichen Art wie der jeweilige Stab. Der jeweils andere Stab trägt aber offenbar eine entgegengesetzte Ladung, da von ihm eine umgekehrte Kraft ausgeht.

Vereinbarung:
Ein Mangel an Elektronen wird als positiv bezeichnet. Ein Überschuss an Elektronen wird als negativ bezeichnet. Mit dieser Vereinbarung von positiver und negativer Ladung kann man durch weitere Versuche nachweisen, dass der Glasstab positiv, der Hartgummistab jedoch negativ aufgeladen war.

Feststellung: Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen ziehen einander an, Ladungen mit gleichen Vorzeichen stoßen einander ab.

3.1.2 Ladungserhaltung

In einem weiteren Versuch wird nun der Stab wieder gerieben. Anschließend wird dieser mit dem benutzten Lappen umhüllt und in die Nähe der Kugel gebracht. Es zeigt sich keine Wirkung. Werden aber Lappen und Stab getrennt, so erzeugt jeder für sich eine deutliche Wirkung.

Durch Versuche wie oben kann außerdem gezeigt werden, dass die Ladungen entgegengesetzter Art sind. Man erkennt, dass mit der Erzeugung der einen Ladungsart auch gleichzeitig die andere mit erzeugt wird. Hieraus ergibt sich der Erhaltungssatz der elektrischen Ladungen:

Die Summe der erzeugten positiven und negativen elektrischen Ladungen ist stets gleich Null.

An diesem Satz und an der entgegengesetzten Kraftwirkung der beiden Ladungsarten wird deutlich, dass es sinnvoll ist, diese mit positiv oder negativ zu bezeichnen.

Bei dem Versuch in 3.1.1 wurde gezeigt, dass die Ladung sich von einem Körper auf den anderen übertragen lässt. Es soll nun untersucht werden, ob sich die verschiedenen Körper elektrisch unterschiedlich verhalten.

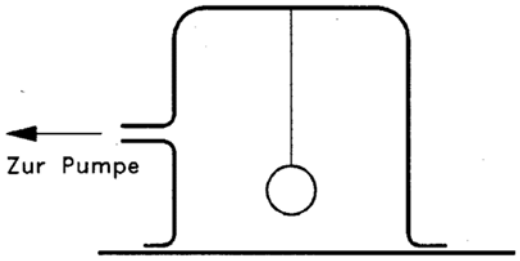
In einem weiteren Versuch wird daher die geladene metallische Kugel mit dem Finger berührt. Es wird festgestellt, dass danach diese Kugel vollkommen unelektrisch wird. Wird dagegen der Stab mit dem Finger berührt, so wird dieser nur an der berührten Stelle unelektrisch. Durch die Berührung mit dem Finger wird also die elektrische Ladung abgeführt. Bei der metallisierten Kugel können sich offenbar alle Ladungsteilchen zum Berührungspunkt bewegen und dort abfließen. Bei den Stäben dagegen ist dies nicht möglich. Man teilt die Körper deshalb in elektrische Leiter und Nichtleiter ein, je nachdem ob sich die Ladung in sehr kurzer Zeit über den ganzen Körper ausdehnt, oder ob sie an der Stelle haften bleibt, wo sie durch die Reibung erzeugt wird. Vollkommene Nichtleiter gibt es nicht. Alle Körper sind mehr oder weniger gute Leiter.

Alle Versuche haben bisher in dem Medium Luft stattgefunden. Es stellt sich daher die Frage, inwieweit das elektrische Feld mit dem Medium Luft in Verbindung steht.

Zur Beantwortung dieser Frage wird nun der Versuch aus 3.1.1 wiederholt und dabei die Kugel in einem evakuierten Glasgefäß untergebracht. Wird nun ein geladener Stab in die Nähe des Gefäßes gebracht, dann werden wie oben wieder die gleichen Kraftwirkungen ohne merkbaren Unterschied beobachtet. Das Feld um den geladenen Stab durchdringt also die Glaswand und ist auch im Vakuum vorhanden. Zwischen Kugel und Stab können auch andere Isolatoren gebracht werden. Jedes Mal werden Kraftwirkungen beobachtet. Eine Kraftwirkung wird jedoch nicht beobachtet, wenn man die Kugel mit einem Metallgehäuse umgibt.

Feststellung:

In Nichtleitern oder Isolatoren kann ein elektrisches Feld existieren. In Leitern ist kein elektrostatisches Feld möglich. Dies führt sofort zum Ausgleich von Ladungen.



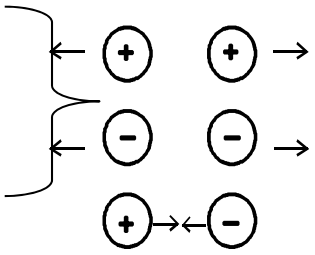
Unterscheidung zwischen Leiter und Nichtleiter:

- Nichtleiter (Isolator): 10^{7} ... 10^{9} freie Elektronen / cm^{3}
- Halbleiter: 10^{10} ... 10^{18} freie Elektronen / cm^{3}
- Elektrische Leiter: ca. 10^{23} freie Elektronen / cm^{3}

3.2 Kräfte auf elektrische Ladungen, Coulomb‘sches Gesetz

3.2.1 Kräfte zwischen 2 Ladungen

Wir fassen aus 3.1 zusammen: Es gibt zwei Arten von Elektrizität.



gleichnamige Ladungen: Abstoßung

ungleichnamige Ladungen: Anziehung

Ladung: „Elektrizitätsmenge“, entzieht sich der sinnlichen Wahrnehmung.

Einheit: $[Q] = 1C = 1A \cdot s \quad (= 1A \cdot 1s)$

Elementarladung: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ (kleinste bekannte Ladungsmenge)

Elektron: $Q_{el} = -e$

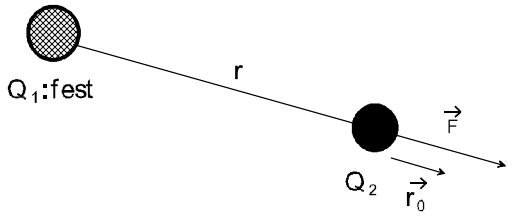
Proton: $Q_{\mathrm{Pr}} = +e$

Quantitatives Kraftgesetz: Coulomb´sches Gesetz

Die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen kann durch ein einfaches Gesetz beschrieben werden.

Idealer Fall: 2 Punktladungen im Raum

Q_1, Q_2, Abstand r $\quad |\vec{r}_0| = 1$



$\vec{r}_0$: *Einheitsvektor*

Feststellungen:

1) $\vec{F}$ liegt in Verbindungslinie Q_1 nach Q_2
2) $F \sim Q_1 \cdot Q_2$ (Vorzeichen)
3) $F \sim \frac{1}{r^2}$

Beziehung: $\vec{F} = p \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_0$ mit $p = \text{Proportionalitätsfaktor} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \frac{C^2}{N \cdot m^2} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

ε_0: elektrische Feldkonstante (Permittivität des Vakuums)

<u>Coulomb´sches Gesetz (Kraftgesetz)</u>

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0}$$

<u>Analogiebetrachtung:</u>

Elektrostatik	**Gravitation**
2 elektrische Ladungen ziehen sich an (oder stoßen sich ab)	2 Körper (Sonne, Planeten, Monde) ziehen sich an
$F \sim \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$	$F \sim \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Beide Formeln gelten für kugelförmige Anordnungen.

3.2.2 Elektrostatisches Feld einer Punktladung

Newton´sches Gravitationsgesetz und Coulomb´sches Gesetz werden bei Vorliegen von zwei Körpern bzw. zwei Ladungen vergleichbarer Größenordnung angewendet.

Beschreibung der Anziehung zwischen der Erde und einem Gegenstand auf der Erde. Der Gegenstand befindet sich im Schwerefeld der Erde:

Verfahren: Einem der Körper wird ein Schwerefeld zugeordnet. Der andere befindet sich in diesem Schwerefeld, so dass auf ihn die Schwerkraft wirkt.

$$F = \underbrace{\gamma \cdot \frac{m_1}{r^2}}_{g} \cdot m_2$$

$$F = g \cdot m_2$$

Erde:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$m_1 = 5{,}98 \cdot 10^{24} kg$$

$$r = 6370 km$$

$$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2} \text{ (an der Erdoberfläche)}$$

Gleichartiges Vorgehen nun bei der Beschreibung der Abstoßkraft zwischen zwei elektrischen Ladungen:

Verfahren: Einer der Ladungen wird ein elektrisches Feld zugeordnet. Die andere befindet sich in diesem elektrischen Feld, so dass auf sie eine Kraft einwirkt:

$$F = \underbrace{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q_1}{r^2}}_{E} \cdot Q_2$$

$$F = E \cdot Q_2$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}}$$

Elektrisches Feld einer Punktladung

3.2.3 Elektrische Ladungen im elektrischen Feld, Elektrische Feldstärke

Nachweis eines Schwerefeldes durch die Kraftwirkung auf eine Masse.

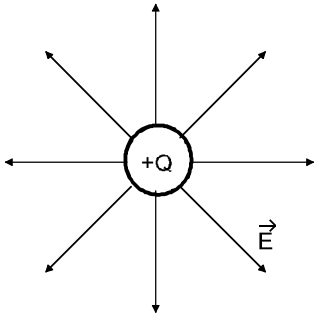
Richtung der Schwerkraft = Richtung des Schwerefeldes

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$$

Nachweis eines elektrischen Feldes durch die Kraftwirkung auf eine elektrische Ladung.

Richtung der elektrischen Kraft = Richtung des elektrischen Feldes

$$\boxed{\vec{F} = Q \cdot \vec{E}}$$



Beispiel: Positive Punktladung

Jede Ladung Q_2 erfährt in diesem Feld die Kraft

$$\vec{F} = Q_2 \cdot \vec{E}$$

Für $Q_2 > 0$ hat $\vec{F}$ dieselbe Richtung wie $\vec{E}$

$\Rightarrow$ Abstoßung

Für $Q_2 < 0$ hat $\vec{F}$ die entgegengesetzte Richtung von $\vec{E}$

$\Rightarrow$ Anziehung

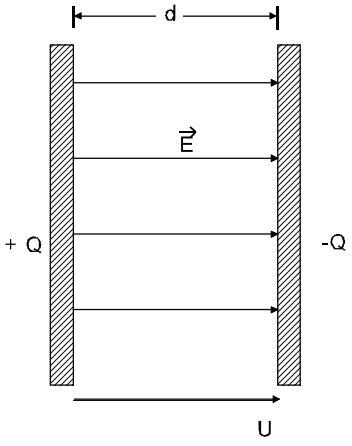
Physikalische Einheit der elektrischen Feldstärke:

$$\text{Einheit}[E] = \frac{\text{Einheit}[F]}{\text{Einheit}[Q]} = \frac{N}{As} = \frac{Nm}{As \cdot m} = \frac{Ws}{As \cdot m} = \frac{VA}{Am}$$

$$\text{Einheit}\ [E] = \frac{V}{m}$$

Elektrische Feldstärke = Spannungsgefälle (korrekt: Potenzialgefälle)

im einfachsten Fall (homogenes Feld):



$$E = \frac{U}{d}$$

$$U = E \cdot d$$

im allgemeinen Fall:

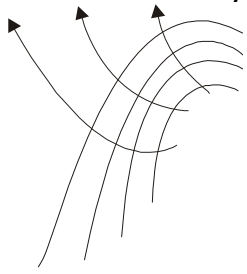
$$\vec{E} = \frac{dU}{d\vec{s}}$$

mit $\vec{E}$ und $d\vec{s}$ in Richtung des stärksten Gefälles

$$\boxed{U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

(Falllinien) Feldlinien

(Höhenlinien) Äquipotentiallinien



3.2.4 Superpositionsprinzip

Sind mehrere Einzelladungen vorhanden, dann erzeugt jede für sich ein elektrisches Feld und alle Teilfelder überlagern sich linear zu einem Gesamtfeld. Dies gilt, weil die Beziehung zwischen der elektrischen Feldstärke *E* und der sie verursachenden Ladung *Q* linear ist.

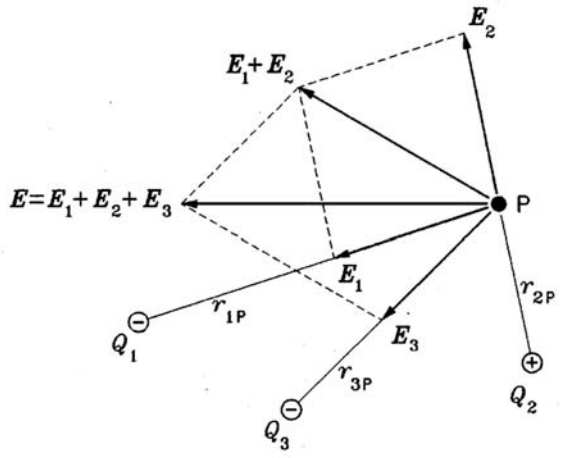
Im nächsten Bild ist dieser Vorgang für drei verschiedene Ladungen dargestellt. P ist der sog. Testpunkt, in dem die Feldstärke bestimmt werden soll. Die Beträge der einzelnen Feldstärken in P sind dann gegeben durch die Gleichung:

$$|E| = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q_i}{r_{iP}^2}; \qquad i = 1,2,3$$

Die Richtungen entsprechen den Richtungen der Verbindungslinien der Ladungen zum Testpunkt. Mit Hilfe der bekannten Abstände und Einzelladungen werden die Teilfelder bestimmt. Das Gesamtfeld ergibt sich dann durch vektorielle (komponentenweise) Addition der einzelnen Teilfelder [1, 5]:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n$$

Wichtig: Der gesamte Raum ist homogen, d.h. die Permittivitätszahl ist gleich (3.5.4).

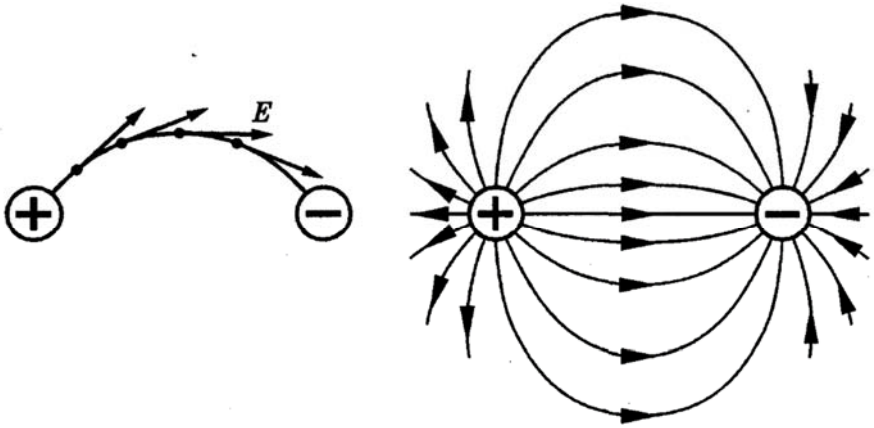


3.2.5 Feldlinien und Feldlinienbilder

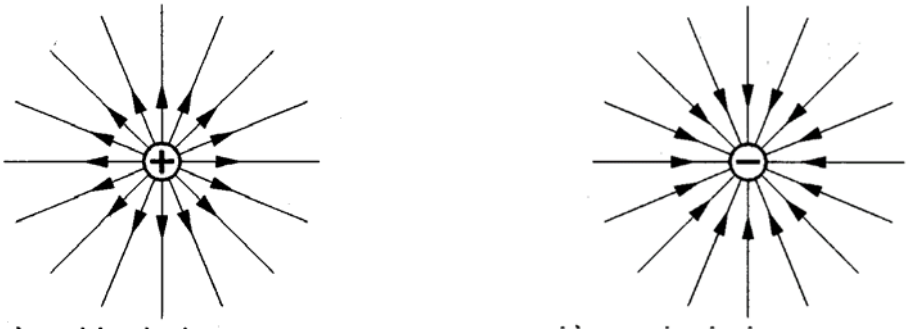
Elektrische Felder werden durch Feldlinien zwischen Ladungen dargestellt. Man erhält damit einen optischen Eindruck von der Anordnung des elektrischen Feldes.

Die Bilder machen deutlich, dass die Feldlinien stets einen Anfangspunkt und einen Endpunkt haben. Gemäß unserer Festlegung beginnen sie in den positiven Ladungen und enden in den negativen Ladungen [5]. Somit gilt:

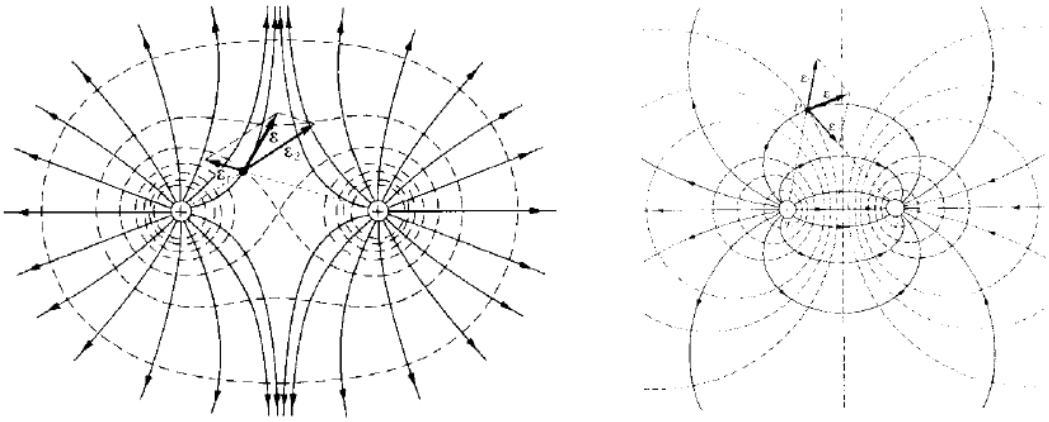
Die Quellen und Senken der elektrischen Feldlinien sind die positiven und die negativen elektrischen Ladungen.



Die nächsten beiden Bilder zeigen die Feldlinien in der Nähe einer positiven und einer negativen Ladung. Wie deutlich zu sehen, verlaufen die Feldlinien in radialer Richtung. Bei einer positiven Ladung sind diese Linien von der Ladung weg gerichtet. Bei negativer Ladung zeigt der Feldvektor in Richtung der Ladung [5].



Weitere Bilder:



Ladungen mit gleichem Vorzeichen

Ladungen mit verschiedenem Vorzeichen

3.3 Idealisierte Ladungsverteilungen

In den nächsten Kapiteln werden wir mit verschiedenen Ladungsverteilungen arbeiten. Daher zunächst eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Verteilungen und deren Berechnung.

3.3.1 Punktladung

In einem Abstand, der groß gegen alle drei Dimensionen eines (Raum-) Ladungsgebietes ist, lässt sich die Wirkung mit Hilfe einer idealen Punktladung im Zentrum des (Raum-) Ladungsgebietes hinreichend genau beschreiben. Wie der Name sagt, wird dabei die Gesamtladung des Raumladungsgebietes auf einen Punkt zusammengedrückt:

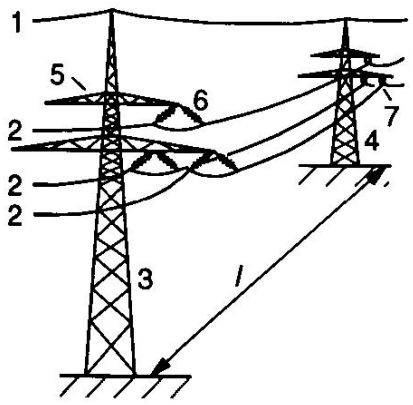
Eine Punktladung ist ein Körper mit endlicher Ladung Q aber vernachlässigbar kleinem Volumen.

Im Grenzfall $r \rightarrow 0$ ist damit die Raumladungsdichte einer Punktladung unendlich groß. Die Punktladung haben wir in 3.2 schon kennen gelernt.

3.3.2 Linienladung

Ist der Abstand eines Betrachters zu einem (Raum-) Ladungsgebiet in zwei Dimensionen relativ groß, so kann die Wirkung solcher Gebiete häufig mit Hilfe von idealen Linienladungen hinreichend genau beschrieben werden.

Als Beispiel für eine Linienladung diene eine Hochspannungsleitung [1]:



1) Erdseil
2) Leiterseil
3) Abspannmast
4) Tragmast
5) Traverse
6) Abspannisolator
7) Hängeisolator
l) Feldlänge

In einem Abstand zu der Leitung, der groß gegen den Drahtdurchmesser der Leitung ist, kann die Ladung dieser Leitung als Linienladung aufgefasst werden, d.h. als linienförmig verteilte Ladung.

Entlang einer Linie kann eine homogene oder eine vom Ort abhängige Ladungsverteilung existieren.

Die Linienladungsdichte $\lambda(x)$ ist eine lokale skalare Größe, d. h. jedem Punkt der Linie wird ein Skalarwert zugeordnet. Die Gesamtladung in einer beliebigen Linie l berechnet sich dann bei bekannter Linienladungsdichte $\lambda(x)$ zu:

$$Q(l) = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{\Delta l} \lambda(x) \cdot \Delta l$$

Hierbei wird die Linie *l* in sehr kleine Liniensegmente Δl aufgeteilt und deren Ladungsbeiträge $\Delta Q = \lambda \cdot \Delta l$ aufsummiert. Dabei wird die Linienladungsdichte innerhalb eines Liniensegments als homogen angenommen. Im Grenzübergang infinitesimal kleiner Liniensegmente geht die Summe in das Integral über:

$$Q(l) = \int_l \lambda(x) \cdot dl$$

Im häufig auftretenden Fall einer homogenen Linienladungsdichte λ_0 ergibt sich als Gesamtladung einfach das Produkt der Linienladungsdichte λ_0 mit der Summe der Liniensegmente, also der Länge *l*:

$$Q(l) = \lambda_0 \cdot l$$

Einheit der Linienladungsdichte: $[\lambda] = \frac{[Q]}{[l]} = \frac{As}{m}$ „Ladung pro Länge“

3.3.3 Flächenladung

Ist die Ausdehnung eines (Raum-) Ladungsgebiets in einer Dimension sehr gering, so kann die Wirkung dieser Gebiete häufig mit Hilfe von idealen Flächenladungen hinreichend genau beschrieben werden.

Als Beispiel für eine Flächenladung diene hier die Ladungsverteilung einer geladenen Metallkugel. Es gilt:

- gleichnamige Ladungen stoßen sich ab;
- aufgrund der Leitfähigkeit driften die Ladungen auseinander bis auf die Kugeloberfläche;
- aus Symmetriegründen ist die Flächenladung homogen (keine bevorzugte Richtung).

Bringt man zwei geladene Kugeln in direkte Nachbarschaft, dann beeinflussen sich die Ladungen gegenseitig und die Flächenladungen werden inhomogen:

- **Abstoßung bei gleichnamigen Ladungen;**
- **Anziehung bei ungleichnamigen Ladungen.**



Die Flächenladungsdichte $\sigma(x,y)$ ist wiederum eine lokale skalare Größe, d. h. jedem Punkt der Fläche wird ein Skalarwert zugeordnet. Die Gesamtladung in einer beliebigen Fläche *A* berechnet sich dann bei bekannter Flächenladungsdichte $\sigma(x,y)$ zu:

$$Q(A) = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{\Delta A} \sigma(x,y) \cdot \Delta A$$

Hierbei wird die Fläche *A* in sehr kleine Teilflächen ΔA aufgeteilt und deren Ladungsbeiträge $\Delta Q = \sigma \cdot \Delta A$ aufsummiert. Dabei wird die Flächenladungsdichte innerhalb einer Teilfläche als homogen angenommen. Im Grenzübergang infinitesimal kleiner Teilflächen geht die Summe in das Integral über:

$$Q(A) = \iint_A \sigma(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_A \sigma(x,y) \cdot dA$$

Im häufig auftretenden Fall einer homogenen Flächenladungsdichte $\sigma(x,y) = \sigma_0$ ergibt sich als Gesamtladung einfach das Produkt der Flächenladungsdichte σ_0 mit der Summe der Teilflächen, also der Fläche *A*:

$$Q(A) = \sigma_0 \cdot A$$

Einheit der Flächenladungsdichte: $[\sigma] = \frac{[Q]}{[A]} = \frac{As}{m^2}$ „Ladung pro Fläche“

3.3.4 Raumladung

Punktladung, Linienladung und Flächenladung sind idealisierte Ladungsverteilungen, die so in der Natur aus energetischen Gründen nicht vorkommen können. In der Praxis sind sie jedoch sehr hilfreich, da sie mathematisch noch einfach zu behandeln sind und in vielen Fällen hinreichend genaue Ergebnisse liefern.

In der Praxis treten tatsächlich Raumladungen auf. So beeinflussen z.B. die Raumladungszonen in vielen elektronischen Bauelementen (z. B. pn-Diode) in entscheidender Weise deren Verhalten bezüglich der Klemmen.

Die Raumladungsdichte $\rho(x,y,z)$ ist eine lokale skalare Größe, d. h. jedem Raumpunkt wird ein Skalarwert zugeordnet. Die Gesamtladung in einem beliebigen Raumvolumen V berechnet sich dann bei bekannter Raumladungsdichte $\rho(x,y,z)$ zu:

$$Q(V) = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{\Delta V} \rho(x,y,z) \cdot \Delta V$$

Hierbei wird das Raumvolumen *V* in sehr kleine Teilvolumina ΔV aufgeteilt und deren Ladungsbeiträge $\Delta Q = \rho \cdot \Delta V$ aufsummiert. Dabei wird die Raumladungsdichte innerhalb eines Teilvolumens als homogen angenommen (z. B. gleich der Raumladungsdichte im Zentrum dieses Teilvolumens). Im Grenzübergang infinitesimal kleiner Teilvolumina geht die Summe in das Integral über:

$$Q(V) = \iiint_V \rho(x,y,z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_V \rho(x,y,z) \cdot dV$$

Im Falle einer homogenen Raumladungsdichte $\rho(x,y,z) = \rho_0$ ergibt sich dann als Gesamtladung einfach das Produkt der Raumladungsdichte ρ_0 mit der Summe der Teilvolumina, also dem Raumvolumen *V*:

$$Q(V) = \rho_0 \cdot V$$

Einheit der Raumladungsdichte: $[\rho] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{As}{m^3}$ „Ladung pro Volumen“

3.4 Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld

3.4.1 Arbeit, Potenzial, Spannung

In einem elektrischen Feld wird auf eine Ladung eine Kraft ausgeübt. Verschiebt man eine positive Ladung im Feld, so wird deshalb, wenn diese Verschiebung in Gegenrichtung zum Feld erfolgt, eine Energie von außen erforderlich sein; es muss Arbeit verrichtet werden. Erfolgt die Bewegung in umgekehrter Richtung, dann verrichtet das Feld die notwendige Arbeit.

Die jeweils aufgewendete Arbeit soll nun berechnet werden. Sie ist positiv, wenn sie vom Feld verrichtet wird. Die Arbeit ist negativ, wenn sie von außen eingebracht wird. Die Arbeit ist eine skalare Größe. Wie aus der Mechanik bekannt, ist sie definiert als Produkt der längs des Weges wirkenden Kraft und des zurückgelegten Weges:

$$\Delta W = |F| \cdot \Delta s$$



Die Bewegungsrichtung der Ladung und die Richtung der Kraft können unterschiedlich sein. Im linken Beispiel sind Kraft und Weg gleich orientiert. Die verrichtete Arbeit ergibt sich als einfaches Produkt von Kraft mal Wegänderung. Im rechten Beispiel ist die Orientierung der Kraft unterschiedlich von der Wegrichtung. Nur der Anteil der Kraft, der in Richtung der Bewegung orientiert ist, trägt zur Energie bei. Dieser Anteil wird mit der folgenden Formel berechnet:

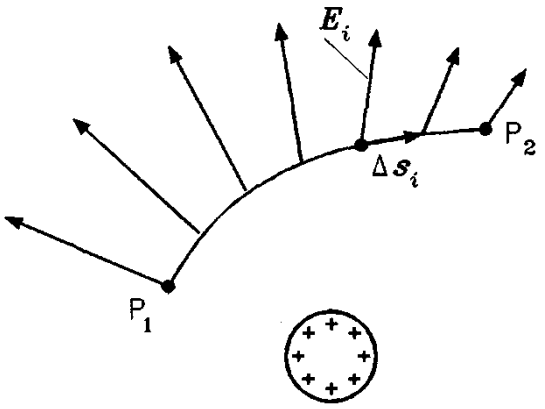
$$\Delta W = |F| \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha$$

Diese Gleichung lässt sich umformulieren, wenn die Wegänderung als Vektor interpretiert wird. In diesem Fall errechnet sich die eingebrachte Energie als skalares Vektorprodukt der Größen Kraft und Wegänderung (Skalarprodukt). Berücksichtigt man, dass die Kraft dem Produkt aus Ladung und Elektrischer Feldstärke gleich ist, so

ergibt sich die eingebrachte Energie auch als Skalarprodukt von Feldstärke und Wegänderung (natürlich noch multipliziert mit der skalaren Größe Ladung):

$$\Delta W = \left|\vec{F}\right| \cdot \Delta\vec{s} = Q \cdot \vec{E} \cdot \Delta\vec{s}$$

Wie das nächste Bild zeigt, ist die elektrische Feldstärke häufig längs des Weges weder bezüglich Richtung noch Betrag konstant. Zur Berechnung der Energie muss daher der Weg in sehr kleine Abschnitte unterteilt werden, in denen die Feldstärke als konstant angenommen werden kann [1].



Die Gesamtenergie ergibt sich dann als Summe der einzelnen Vektorprodukte:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = Q \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

Lässt man nun die einzelnen Wegelemente infinitesimal klein werden, so wird aus der Summation wieder eine Integration:

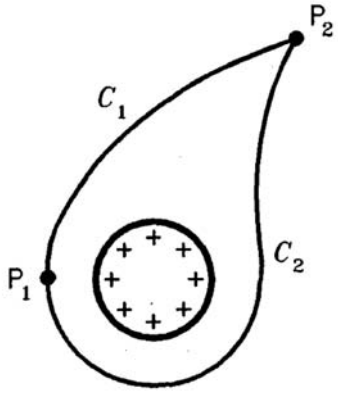
$$W = Q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Diese Integration ist längs eines bestimmten Weges auszuführen. Man bezeichnet das Integral deshalb als Linienintegral der Feldstärke über einem Weg. Wie das nächste Bild mit einer positiv geladenen Kugel zeigt, sind zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 verschiedene Wegstrecken möglich. Diese sind hier mit C_1 und C_2 gekennzeichnet.

Die Frage ist nun, ob das Ergebnis der Energieberechnung von dem gewählten Weg abhängt. Es wird angenommen, dass sich die Ladung der Kugel nicht ändert. Es muss weiter gefordert werden, dass nach einem Durchlaufen der Schleife und Rückkehr zum Ausgangspunkt das Feld den Ausgangszustand wieder annimmt. Das bedeutet aber, dass die gesamte Arbeit während eines Umlaufes den Wert Null hat. Dies ist nur möglich, wenn die verrichtete Arbeit unabhängig vom verwendeten Weg ist.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}_2$$

(c_1) (c_2)



Weiter gedacht bedeutet dies auch, dass eine Integration des elektrischen Feldes über einen geschlossenen Weg den Wert 0 ergeben muss [1]:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Der Kreis im Integralzeichen deutet auf den geschlossenen Weg hin. Allgemein wird ein Feld, dessen Linienintegral über einen geschlossenen Weg den Wert Null ergibt, als wirbelfreies Feld bezeichnet. Dies bedeutet auch, dass es keine in sich geschlossenen Feldlinien gibt. Da auf einer Feldlinie die Feldstärke immer die gleiche Richtung hat, würde das Integral einen endlichen Wert ergeben, aber nicht Null. In dieser Hinsicht unterscheidet sich das elektrische Feld wesentlich vom magnetischen Feld.

Elektrostatische Felder haben keine in sich geschlossenen Feldlinien. Sie sind wirbelfrei.

Da, wie festgestellt, das Ergebnis der Integration unabhängig vom Weg ist, kann dieser so gewählt werden, dass die Integration möglichst einfach durchgeführt werden kann.

Welcher Weg auch gewählt wird, das Ergebnis für die Energie ist nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängig. Man kann daher jedem Punkt im Feld einen charakteristischen Funktionswert zuordnen. Dieser Funktionswert wird als elektrostatisches Potenzial bezeichnet. Es ist nicht absolut festgelegt. Die relative Größe ist definiert durch folgende Gleichung:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} = -(\varphi(P_2) - \varphi(P_1))$$

Zum elektrostatischen Potenzial kann also eine beliebige Konstante addiert oder subtrahiert werden, ohne dass das Ergebnis des Linienintegrals sich ändert. Im Allgemeinen wählt man aber das Potenzial der Erde oder das des unendlich fernen Raumes zu Null. Ist das elektrostatische Potenzial in jedem Punkt des Raumes bekannt, dann ist auch das Feld eindeutig festgelegt. Anstelle des Feldvektors *E* kann somit auch die skalare Größe φ zur Charakterisierung des elektrostatischen Feldes benutzt werden. Sind die Punkte P_1 und P_2 sehr nah beieinander, dann wird aus obiger Gleichung:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\varphi \qquad \text{oder} \qquad \vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{s}}$$

Die Feldstärke kann damit aus dem elektrostatischen Potenzial eindeutig berechnet werden. Die Potenzialdifferenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 wird auch als elektrische Spannung bezeichnet.

Als Ergebnis kann nun zusammengefasst werden:

- Die Arbeit, die das Feld bei der Verschiebung einer Ladung *Q* von P_1 nach P_2 verrichtet, ist gleich dem Produkt aus Ladung und elektrischer Spannung zwischen den Punkten P_1 und P_2.

- Entsprechend kann die physikalische Bedeutung des Begriffes Potenzial interpretiert werden. Das Potenzial ist ein Maß für die Energie, die eine positive Probeladung aufnimmt, wenn sie im Feld vom Potenzial Null auf ein höheres Potenzial verschoben wird. Diese Energie bezeichnet man als potenzielle Energie. Es gilt: Die potenzielle Energie einer Ladung im Feld ist (bezogen auf das Null-Potenzial) gleich dem Produkt aus Potenzial und Ladung.

Elektrische Spannung und Potenzial sind damit nützliche und grundlegende Begriffe im statischen elektrischen Feld. Sie geben direkt an, welche Arbeit das Feld pro Ladungseinheit zu leisten imstande ist. Für die Einheit der Spannung und des Potenzials wurde daher auch eine eigene Bezeichnung, das Volt (V), eingeführt. Diese Einheit wurde wie folgt festgelegt:

$$[W] = [Q \cdot U] = 1V \cdot C = 1V \cdot As = 1Nm = 1kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

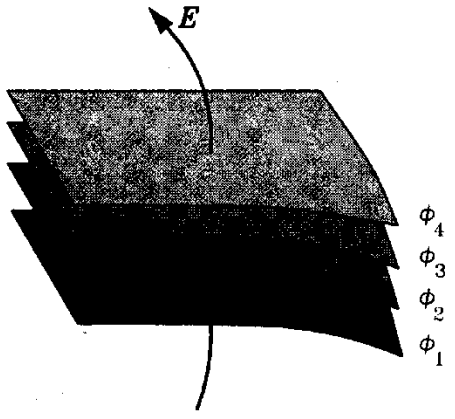
Damit ergibt sich in den Grundeinheiten: $1V = 1\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$

Nachdem die Einheit der Spannung bekannt ist, kann nun auch die Einheit der elektrischen Feldstärke nochmals angegeben werden. Nach unseren Ergebnissen ist nämlich die Dimension der elektrischen Feldstärke gleich der Dimension der Spannung dividiert durch die Dimension der Länge.

Es ergibt sich also: $[E] = \frac{[U]}{[l]} = \frac{V}{m}$

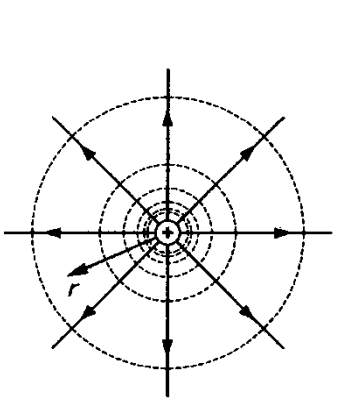
3.4.2 Äquipotenzialflächen

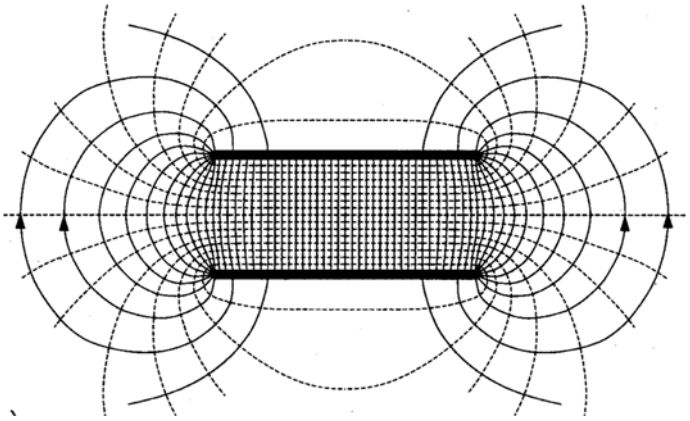
Abschließend sollen in diesem Abschnitt noch einige Felddarstellungen der Potenziale gezeigt werden. Flächen, auf denen das Potenzial konstant ist, werden als Äquipotenzialflächen bezeichnet. Das nebenstehende Bild zeigt Beispiele solcher Äquipotenzialflächen [1].



Bei endlicher Feldstärke ergibt sich $d\varphi = 0$ nur dann, wenn die Vektoren $\vec{E}$ und $d\vec{s}$ miteinander einen rechten Winkel bilden. Das bedeutet, dass dann die Feldstärkevektoren und damit auch die Feldlinien senkrecht auf den Potenzialflächen stehen.

In den nächsten Bildern sind für eine Punktladung und für eine Zweiplatten-Anordnung die Äquipotenzialflächen gezeichnet. Infolge der Kugelsymmetrie bei der Punktladung sind die Äquipotenzialflächen auch Kugelflächen. Da auf Leiteroberflächen die Feldlinien senkrecht stehen, sind diese immer Äquipotenzialflächen [5].





Abschließend wird das Potenzial einer positiven Punktladung berechnet (siehe linkes Bild). Wir legen dazu fest, dass der Punkt P_1 im Unendlichen liege, und dort das Potenzial gleich Null sei. Es wird längs eine Feldlinie von ∞ bis zur Fläche im Abstand *r* integriert. Dann ist:

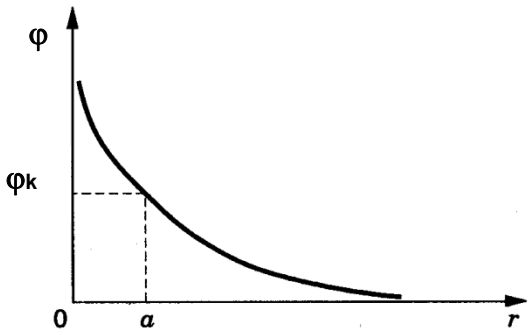
$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = -|E| \cdot ds = |E| \cdot dr \,,$$

denn die beiden Vektoren $\vec{E}$ und $d\vec{s}$ haben entgegen gesetzte Richtung und ebenso ist $d\vec{s} = -d\vec{r}$.

Für die elektrische Feldstärke *E* können wir jetzt die verursachende Ladung *Q* einsetzen. Somit gilt:

$$-\varphi(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}\, dr = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot Q \cdot \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

. Damit ergibt sich: $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{r}$



Dieser Potenzialverlauf ist im nächsten Bild dargestellt.

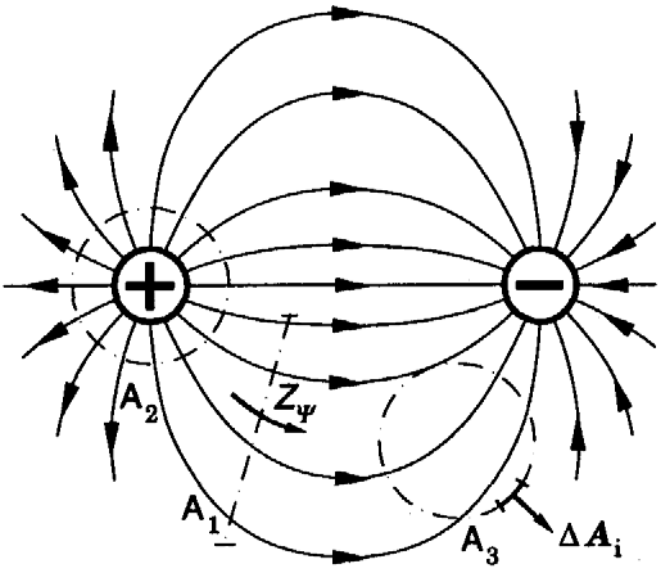
Am Ort der Punktladung würde sich damit ein unendlich hohes Potenzial ergeben. Das ist ein weiteres Indiz dafür, dass ideale Punktladungen nur in der Theorie, nicht aber in der Praxis existieren (vgl. 3.3).

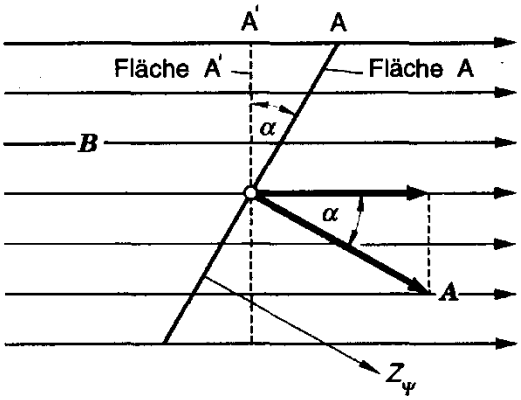
3.5 Erregung des elektrostatischen Feldes

3.5.1 Allgemeines zum Fluss

Ein wichtiger Begriff eines Vektorfeldes ist der so genannte Fluss. Für die Berechnung eines Flusses wird zunächst die Definition einer Fläche benötigt. Diese Fläche kann offen sein oder auch ein Volumen vollständig umgeben. Ein Beispiel für eine offene Fläche wäre ein Blatt, ein Beispiel für eine geschlossene Fläche die Oberfläche einer Kugel. Der Fluss gibt nun an, wie viele Feldlinien eines Vektorfeldes durch diese definierte Fläche hindurchtreten. Üblicherweise wird der Fluss positiv gezählt, wenn die Linien des Feldes aus dieser Fläche heraustreten.

Im nächsten Bild sind verschiedene Flächen in dem Feld zweier Punktladungen eingetragen. Die Fläche A_1 ist offen, die Fläche A_2 ist geschlossen und beinhaltet eine Punktladung. Die Fläche A_3 ist geschlossen, beinhaltet aber keine Punktladung.
Vergleicht man die Flächen A_2 und A_3 miteinander, so stellt man fest, dass bei der Fläche A_2 alle Feldlinien durch die Außenfläche heraustreten. Der Fluss dieser Fläche wird also ungleich Null sein. Im Fall der Fläche A_3 ist die Anzahl der in die Fläche hineingehenden Feldlinien gleich der Anzahl der aus der Fläche herauskommenden Feldlinien. Der Fluss somit Null.





Bei einer offenen Fläche muss die positive Orientierung dieser Fläche durch den Normalen-Vektor definiert werden. Dies ist im nebenstehenden Bild mit Hilfe des Flächenvektors A geschehen.

Ist ein Feld homogenen, dann kann der Fluss mit Hilfe einer einfachen Multiplikation berechnet werden. Sind die Richtung von Flächenvektor *A* und Feldvektor *B* nicht gleich, so muss anstelle der tatsächlichen Fläche *A* die sog. wirksame Fläche *A'* für die Rechnung verwendet werden. Der Fluss ergibt sich somit als skalares Produkt der beiden Vektorgrößen *B* und *A'*:

$$\Psi = |B| \cdot A'$$

Ist das Feld nicht homogen, so muss der gesamte Fluss durch die Addition der Beiträge einzelner Teilflächen berechnet werden:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Im allgemeinen Fall ermittelt man den Fluss mit Hilfe des Flächenintegrals:

$$\Psi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Dies ist die allgemeine Definition des Flusses. Bitte beachten, dass sowohl *B* als auch *A* Vektorgrößen sind.

3.5.2 Elektrischer Fluss

Zur Beschreibung der Wirkung des elektrischen Feldes sind verschiedene Theorien entwickelt worden. Bei der so genannten Fernwirkungstheorie betrachtet man die Wirkung der Ladungen über die Distanz zwischen den Ladungen hinweg. Bei der Nahwirkungstheorie nach Faraday wird davon ausgegangen, dass nicht die Ladungen, sondern der Raum der Träger der elektrischen Kräfte ist. Diese pflanzen sich, bei den Ladungen beginnend, von Punkt zu Punkt in den Raum hinaus fort.

Eine weitere, häufig verwendete Betrachtungsweise ist die Definition der elektrischen Erregung. In diesem Fall wird angenommen, dass es in jedem Feldpunkt eine zugehörige Erregung dieses elektrischen Zustandes gibt. Man ordnet dieser Erregung einen neuen Vektor zu, der „elektrische Erregung“ genannt wird.

Die elektrische Feldstärke hängt dabei nicht nur von der Ladungsverteilung, sondern auch von dem Medium ab, in dem sich die Ladungen befinden.

Beispiel: Punktladung $$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Es soll deshalb eine physikalische Größe definiert werden, die den Einfluss einer Ladung *Q(x,y,z)* auf den umgebenden Raum beschreibt, aber ohne Berücksichtigung des umgebenden Mediums.

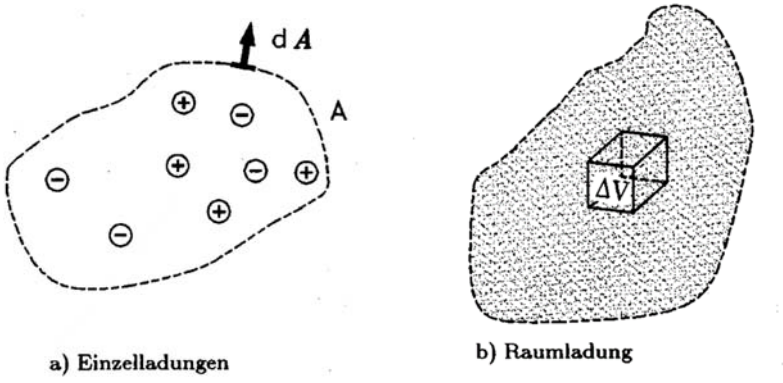
Einfachster Fall: Punktladung in einem beliebigen homogenen Medium, keine anderen Ladungen in der Nähe

Der Einfluss, den die Ladung auf den umgebenden Raum ausübt, hängt nur von dem Wert der Ladung selbst ab. Naheliegend daher die Gleichsetzung von Ladung und Einfluss:

Elektrischer (Verschiebungs-) Fluss $\boxed{\Psi = Q}$ "Psi"

Achtung: „Verschiebungsfluss" ist eine sehr missverständliche Bezeichnung. Hier fließt nichts; es wird auch nichts verschoben, vor allem keine Ladung. Es handelt sich vielmehr um den Gesamteinfluss auf den umgebenden Raum (besser: „Erregungsfluss").

Obige Überlegung kann noch weiter verallgemeinert werden. Der Gesamteinfluss von elektrischen Ladungen auf den umgebenden Raum kann als Gesamtfluss der elektrischen Erregung interpretiert werden. Dieser ist bei einer beliebigen geschlossenen Fläche gleich dem Gesamtwert der eingeschlossenen Ladungen [5].



Bei Einzelladungen ergibt sich die gesamte Ladung einfach als Summe der Einzelladungen:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Ist eine so genannte Raumladung definiert, so muss die gesamte Ladung über das Volumenintegral berechnet werden:

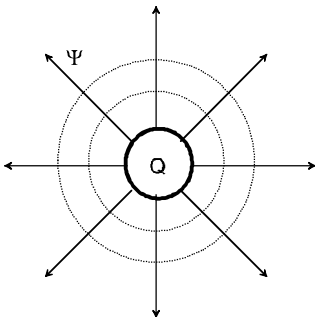
$$Q = \sum \rho_i \Delta V_i = \int_V \rho \cdot dV$$

3.5.3 Elektrische Flussdichte

Der von der bzw. den Ladungen ausgehende Einfluss verteilt sich mit zunehmender Entfernung auf immer größere (Kugel-) Oberflächen. Dies ist vergleichbar einem Lichtstrom, der von einer punktförmigen Lichtquelle ausgeht.

Der elektrische Fluss ist eine integrale skalare Größe ohne Richtungsangabe. Benötigt wird aber auch eine vektorielle Größe, die den „Ladungs-Einfluss“ und dessen Richtung an einem ganz bestimmten, räumlich begrenzten Punkt beschreibt.

Einfachster Fall: <u>Punktladung</u> in einem beliebigen homogenen Medium, keine anderen Ladungen in der Nähe



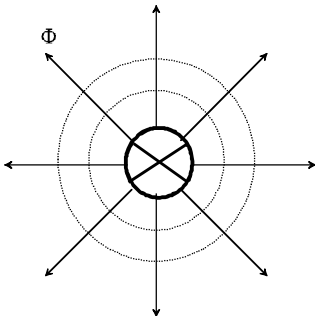
Elektrischer Verschiebungsfluss

Ψ Einheit [As]

Elektrische Flussdichte

$D = \frac{d\Psi}{dA}$ Einheit [As/m^2]

<u>Analogie:</u>



Lichtstrom

Φ Einheit [lm]

Beleuchtungsstärke

$E = \frac{d\Phi}{dA}$ Einheit [lm/m^2 = lx]

Im allgemeinen Fall wirkt eine Ladung nicht in alle Richtungen gleichmäßig auf den umgebenden Raum (wie sich auch der Lichtstrom einer Lampe nicht in alle Richtungen gleich verteilen muss).

Damit also Definition der **<u>elektrischen Flussdichte</u>** (analog zur Beleuchtungsdichte):

$$\boxed{D = \frac{d\Psi}{dA}}$$ <u>Bedingung:</u> Fläche *dA* steht senkrecht zur Flussrichtung

Damit ergibt sich allgemein: $\boxed{\vec{D} = \frac{d\Psi}{d\vec{A}}}$ <u>Einheit</u> $[D] = \frac{As}{m^2}$

Eine Umkehrung der Gleichung ergibt:

$$\Psi = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \Longrightarrow \quad Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$ „ Satz von Gauß“

$\oiint$ oder auch $\oint$: Das Integral erstreckt sich über eine geschlossene Hüllfläche - „Hüllenintegral“

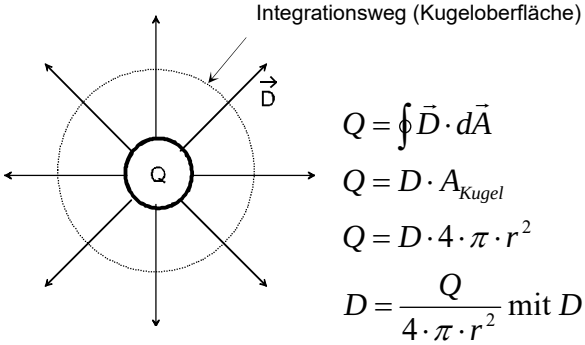
Der oben genannte „Satz von Gauß“ lässt sich schließlich noch wie folgt allgemeiner formulieren (3.3.4). Dabei wird das Volumen *V* von der geschlossenen Hüllfläche *A* eingeschlossen:

$$Q = \int_V \rho \cdot dV = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

3.5.4 Permittivität

Weiter Beispiel: Punktladung

Integration der elektrischen Flussdichte über die Oberfläche einer konzentrischen Kugel. Dort ist *D* überall gleich groß.



$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$Q = D \cdot A_{Kugel}$$

$$Q = D \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$D = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \text{ mit } D = \varepsilon \cdot E \quad \text{folgt} \quad E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Es ergibt sich: $\varepsilon = \frac{D}{E}$ (ε = Permittivität)

Hier in dem Beispiel weisen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ radial von der Punktladung weg, haben also dieselbe Richtung.

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}}$$

Diese Gleichung gilt allgemein.

Zahlenwert für Vakuum ist die **elektrische Feldkonstante:**

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi} \cdot 10^{-9} \frac{As}{Vm} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

mit $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$.

$\varepsilon_r =$ Permittivitätszahl

	Luft	Glas	Hartpapier	Pertinax	Öl
ε_r	1,0006	5..10	5..6	4,8	2,2..2,5

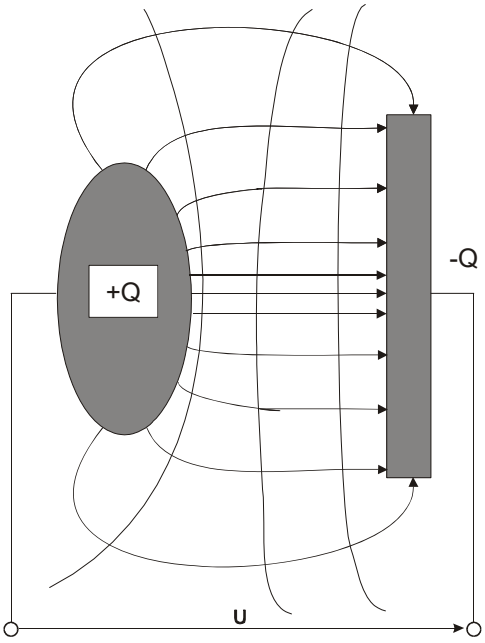
3.6 Kapazität

3.6.1 Definition

In diesem Kapitel wird ein wichtiger Parameter des elektrischen Feldes behandelt. Es handelt sich um die Kapazität, welche angibt, wie viel Energie in dem elektrischen Feld eines Systems gespeichert werden kann. Die Kapazität charakterisiert auch ein wichtiges Bauteil der Elektrotechnik, das Kondensator genannt wird.

In der technischen Anwendung werden immer Isolierstoffe zwischen Leitern oder Plattenanordnungen benötigt. Dies kann im einfachsten Fall die Umgebungsluft sein. Eine höhere Isolierfähigkeit erreicht man jedoch mit Werkstoffen, die als Dielektrika bezeichnet werden. Der Einfluss solcher Isolierstoffe ist ebenfalls Bestandteil dieses Kapitels.

Legt man an zwei Elektroden eine Spannung an, so lädt sich die eine Elektrode positiv und die andere Elektrode negativ auf. Dabei besteht Proportionalität zwischen Spannung und Ladung.

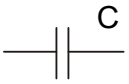


$$Q \sim U$$

$$\boxed{Q = C \cdot U}$$

$$C = \frac{Q}{U} \qquad \textbf{Kapazität}$$

$$\text{Einheit } [C] = \frac{As}{V} = F \text{ (Farad)}$$



Schaltungssymbol

3.6.2 Methoden zur Kapazitätsberechnung

Für die Kapazitätsberechnung gibt es zwei prinzipielle Methoden:

- Eingeprägte Ladung *Q*
- Eingeprägte Spannung *U*.

Methode *Q-D-E-U-C*

Bei dieser Methode wird auf eine Elektrode des Kondensators die Testladung +*Q* und auf die zweite Elektrode die Ladung −*Q* aufgebracht. Diese Methode ist immer dann sinnvoll, wenn die elektrische Erregung auf einer Äquipotenzialfläche überall den gleichen Betrag aufweist und in eine Richtung des gewählten Koordinatensystems zeigt.

Q → Testladung vorgeben

D → Symmetrie → $\boxed{\vec{D} = \frac{Q}{\vec{A}}}$ ($\left|\vec{D}\right|$ auf Äquipotenzialfläche *A* konstant)

E → $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$

U → $U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ Integration entlang Feldlinie

C → $C = \frac{Q}{U}$

Beispiel: einfacher Plattenkondensator, Zylinderkondensator, Kugelkondensator (3.6.3 – 3.6.5), Reihenschaltung von Kapazitäten (3.6.8).

Methode *U-E-D-Q-C*

Bei dieser Methode wird an dem Kondensator eine Testspannung *U* eingeprägt und die resultierende Ladung bestimmt. Diese Methode ist immer dann sinnvoll, wenn die elektrische Feldstärke entlang einer Feldlinie überall den gleichen Betrag aufweist und in eine Richtung des gewählten Koordinatensystems zeigt.

U → Testspannung vorgeben

E → Symmetrie → $\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi}$ ($|\vec{E}|$ entlang Feldlinie *s* konstant)

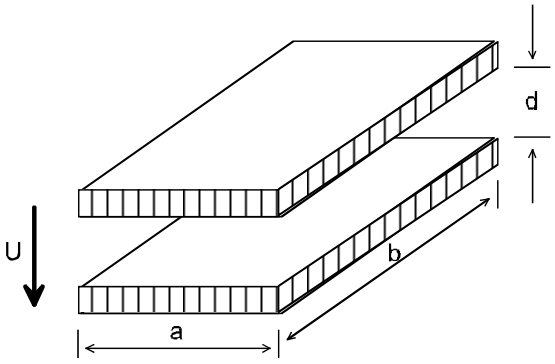
D → $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

Q → $Q = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$ Integration über Äquipotenzialfläche

C → $C = \frac{Q}{U}$

Beispiel: Parallelschaltung von Kapazitäten (3.6.7), vertikal geschichtete Dielektrika

3.6.3 Plattenkondensator



a, b >> d

Randfelder vernachlässigt

Methode *Q-D-E-U-C*

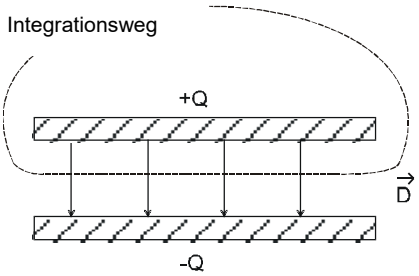
$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot A \quad \text{mit} \quad A = a \cdot b$$

$$D = \frac{Q}{A}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A}$$

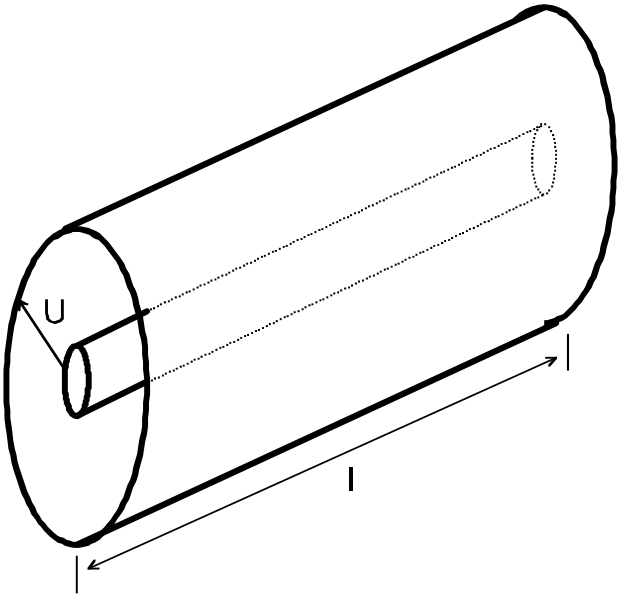
$$U = \int E \cdot ds = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon \cdot A}$$

$$C = \frac{Q}{U} = Q \cdot \frac{\varepsilon \cdot A}{Q \cdot d}$$



$$\boxed{C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}} \qquad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}}$$

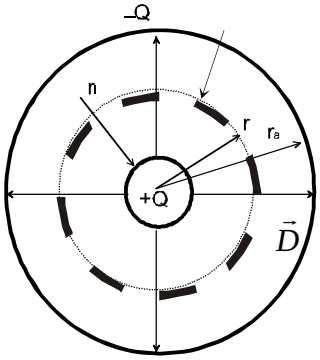
3.6.4 Zylinderkondensator



$l >> r_a - r_i$

Randfelder vernachlässigt

Methode *Q-D-E-U-C*



$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$$

$$D = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r \cdot l}$$

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E \cdot dr = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} dr$$

$$U = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \left[\ln(r_a) - \ln(r_i)\right]$$

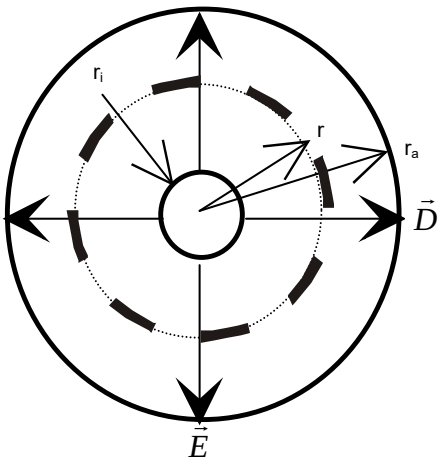
$$U = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = Q \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l}{Q \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$$

$$\boxed{C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}} \qquad \boxed{C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}}$$

3.6.5 Kugelkondensator

Methode *Q-D-E-U-C*



$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$D = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

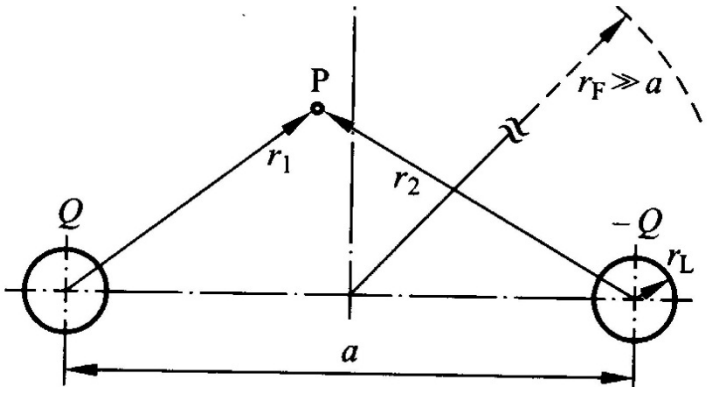
$$U = \int_{r_i}^{r_a} E \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^2} dr$$

$$U = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right]$$

$$C = \frac{Q}{U} = Q \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{Q \cdot \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right]}$$

$$\boxed{C = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_i \cdot r_a}{r_a - r_i}}$$

3.6.6 Kapazität einer Zwei-Draht-Leitung



Methode *Q-D-E-U-C*

Hier muss zusätzlich das Verfahren der Superposition angewendet werden. Beide Leiter werden unabhängig voneinander behandelt. Damit wird der Einfluss ($\vec{D}$, $\vec{E}$) auf die Umgebung separat berechnet [2].

Es gilt: $r_L << a$

Wir berechnen die Spannung eines Punktes P zu einem Zylinder um beide Leiter herum, der einen Radius $r_F >> a$ hat. Potenzial des Zylinders ist 0.

1. Schritt:
Nur der linke Leiter wird betrachtet (+Q)

$$D_1 = \frac{Q}{2\pi \cdot r_1 \cdot l}$$

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1 \cdot l}$$

$$U_{P1} = \int_{r_1}^{r_F} \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr$$

$$U_{P1} = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_F}{r_1}\right)$$

2. Schritt:
Nur der rechte Leiter wird betrachtet (-Q)

$$D_2 = \frac{-Q}{2\pi \cdot r_2 \cdot l}$$

$$E_2 = \frac{-Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_2 \cdot l}$$

$$U_{P2} = \int_{r_2}^{r_F} \frac{-Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr$$

$$U_{P2} = \frac{-Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_F}{r_2}\right)$$

Die Spannung von P ist gegeben durch die Überlagerung (Superposition) der beiden Teilspannungen:

$$U_p = U_{P1} + U_{P2} = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \left[\ln\left(\frac{r_F}{r_1}\right) + \ln\left(\frac{r_2}{r_F}\right)\right] = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Wollen wir nun die Spannung zwischen den beiden Leitern wissen, berechnen wir die Spannungen auf den beiden Leiter-Oberflächen, U_{L1} und U_{L2}, das heißt wir setzen in obiger Gleichung: $r_2 \rightarrow a$ und $r_1 \rightarrow r_L$ und umgekehrt:

Spannung von Leiter 1:

$$U_{L1} = \frac{Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{a}{r_L}\right)$$

Spannung von Leiter 2:

$$U_{L2} = \frac{-Q}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{a}{r_L}\right)$$

Damit erhalten wir schließlich die Spannung zwischen beiden Leitern als ihre Potenzialdifferenz und, als Konsequenz daraus, auch die Kapazität der Zwei-Draht-Leitung:

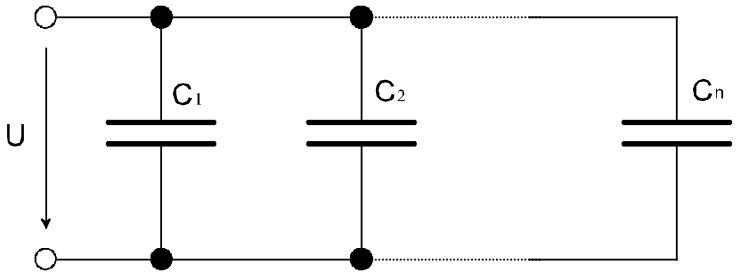
$$U = U_{L1} - U_{L2} = \frac{Q}{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{a}{r_L}\right) \qquad \text{und} \qquad \boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{a}{r_L}\right)}}$$

3.6.7 Parallelschaltung von Kapazitäten

Wie beim elektrischen Widerstand sind auch hier zwei Grundschaltungen beim Zusammenschalten mehrerer Kondensatoren möglich. Dies sind die Parallelschaltung und die Reihenschaltung.

Bei der Parallelschaltung von Kondensatoren werden die Platten mit positiver Ladung und die Platten mit negativer Ladung nebeneinander angeordnet. Die jeweiligen positiv oder negativ geladenen Platten befinden sich auf gleichem elektrischen Potenzial, die elektrischen Spannungen über den einzelnen Kondensatoren sind damit gleich. Die gesamte Ladung der parallel geschalteten Kondensatoren ist die Summe der Einzelladungen.

Methode *U-E-D-Q-C*



$$Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$$

$$Q = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + ... + C_n \cdot U$$

$$Q = (C_1 + C_2 + ... + C_n) \cdot U$$

$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

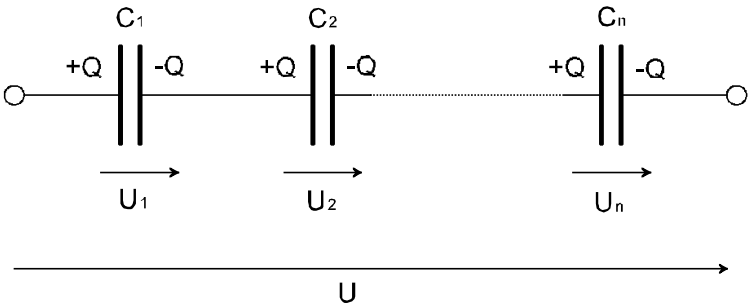
$$\boxed{C = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu}$$

Wir halten fest: **Bei der Parallelschaltung addieren sich die Einzelkapazitäten zur Gesamtkapazität.**

3.6.8 Reihenschaltung von Kapazitäten

Die Kondensatoren werden im ungeladenen Zustand in Reihe geschaltet. Es fließen keine Leckströme. Alle Kondensatoren tragen die gleiche Ladung. Die angeschlossene Spannungsquelle bringt die Ladung +*Q* auf die linke Elektrode von C_1 und die Ladung –*Q* auf die rechte Elektrode von C_n. Die Aufladung der anderen Elektroden geschieht durch Ladungstrennung.

Methode *Q-D-E-U-C*



$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + ... + \frac{Q}{C_n}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{U}{Q}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+....+\frac{1}{C_n}$$

$$\boxed{\frac{1}{C}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{C_\nu}}$$

Wir halten fest: **Bei der Reihenschaltung addieren sich die Reziprokwerte der Einzelkapazitäten zum Reziprokwert der Gesamtkapazität.**

3.6.9 Schlussbetrachtung

Zur Berechnung von Kapazitäten bietet sich folgende Lösungsstrategie an:

1. Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

2. Beachtung der Grenzbedingungen
   - ideal leitende Elektroden ($\vec{E}$ und $\vec{D}$ stehen senkrecht auf Metall)
   - unterschiedliche Dielektrika (E_t stetig und D_n stetig)

3. Feldlinienbild mit Äquipotenzialflächen einzeichnen

4. Symmetrieüberlegungen

   a) Muss die elektrische Erregung $\vec{D}$ auf einer Äquipotenzialfläche überall gleich groß sein
   ⇨ Methode ***Q-D-E-U-C***, dies entspricht der **Reihenschaltung** infinitesimaler Kondensatoren

   $$\frac{1}{C}=\int d\frac{1}{C}=\frac{1}{Q}\int dU=\int\frac{ds}{\varepsilon\cdot A}$$

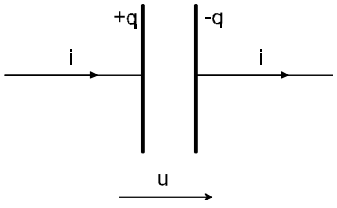
   b) Muss die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ entlang einer Feldlinie überall gleich groß sein
   ⇨ Methode ***U-E-D-Q-C***, dies entspricht der **Parallelschaltung** infinitesimaler Kondensatoren

   $$C=\int dC=\frac{1}{U}\int dQ=\int\frac{\varepsilon\cdot dA}{s}$$

Dielektrikum	Typ und Eigenschaften
Kunststoff	▪ gewickelte, metallbedampfte Kunststofffolien ▪ Dicke des Dielektrikums d ≈ 1 … 3 μm ▪ Relative Permittivität $\varepsilon_r \approx 2 \ldots 4$ ▪ typische C-Werte 10 pF … 10 μF ▪ Standardkondensator (SMD oder bedrahtet)
Keramik	▪ keramische Vielschichtkondensatoren: abwechselnd Schichten aus dielektrischen Keramiken (d ≈ 1…3 μm) und metallischen Elektroden in Parallelschaltung ▪ Relative Permittivität - paraelektrische Keramik: $\varepsilon_r \approx 10 \ldots > 100$ - ferroelektrische Keramik: $\varepsilon_r \approx 1000 \ldots > 10000$ ▪ hochwertiger Standardkondensator (SMD) ▪ C-Werte: 1 pF … 3,3 µF
elektrochemisch gebildetes Oxid	▪ Dielektrikum = Oxidhaut (d ≈ 0,05 … 0,5 μm) eines anodisch oxidierten Metalls (Al-Folie oder Tantal-Sinterkörper) ▪ Bezeichnung: Elektrolytkondensator oder kurz Elko ▪ Relative Permittivität $\varepsilon_r \approx 8$ (Al_2O_3), $\varepsilon_r \approx 27$ (Ta_2O_5) ▪ Vorteil: große C-Werte (> 10 mF) ▪ Nachteil: hoher Leckstrom, nur NF-Bereich
elektrochemische Doppelschicht	▪ Dielektrikum = adsorbierte H_2O-Molekülschicht (d ≈ 0,1nm !) auf Edelmetallfolie (o.ä.) ▪ Relative Permittivität $\varepsilon_r \approx 13$ (ausgerichtete H_2O-Moleküle) ▪ Vorteil: extrem große C-Werte (> 1 F) ▪ Nachteil: sehr niedrige Nennspannungen, sehr hoher Leckstrom, nur NF-Bereich

3.7 Energie und Kräfte im elektrischen Feld

3.7.1 Kondensatorenergie



Der Kondensator wird aufgeladen. Spannung und Ladung wachsen nach irgendwelchen beliebigen Zeitfunktionen *u(t)* bzw. *q(t)* an. Zum Zeitpunkt $t=t_1$ ist der Ladevorgang abgeschlossen. Dann gilt:

$$i(t \geq t_1) = 0 \qquad u(t \geq t_1) = U \qquad q(t \geq t_1) = Q$$

Anmerkung: Zeitabhängige Größen werden i. A. mit kleinen Buchstaben (*u, i, q*) bezeichnet.

Es gelten folgende Beziehungen:

$$p = u \cdot i$$

$$u = \frac{q}{C};\ i = \frac{dq}{dt}$$

Damit ergibt sich die Energie, die im Kondensator gespeichert ist, zu:

$$W = \int_0^{t_1} p \cdot dt$$

$$W = \int_0^{t_1} u \cdot i \cdot dt$$

$$W = \int_0^{t_1} \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} \cdot dt$$

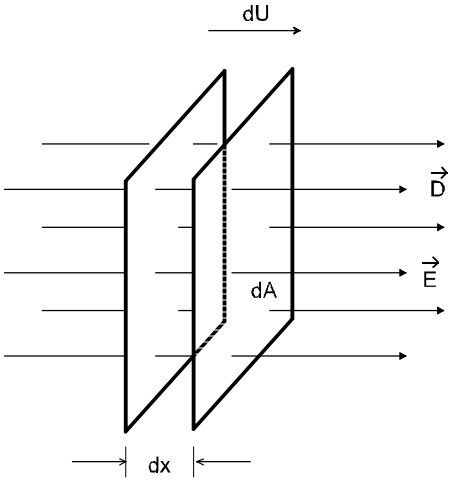
$$W = \int_0^{Q} \frac{1}{C} \cdot q \cdot dq$$

$$W = \frac{1}{2 \cdot C} \cdot q^2 \Big|_{q=0}^{Q}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$$

3.7.2 Energiedichte

In den allermeisten Fällen wird die Feldverteilung nicht homogen sein. In diesen Fällen ist es notwendig, statt der gesamten Energie mit dem Begriff der Energiedichte zu arbeiten. Um die Energiedichte herzuleiten, wird in das inhomogene Feld ein kleiner (virtueller) Plattenkondensator eingebracht. Die Abmessungen dieses Plattenkondensators werden so gewählt, dass innerhalb des Kondensators ein homogenes Feld angenommen werden kann. Es gilt also: Ein infinitesimal kleiner Ausschnitt aus einem inhomogenen Feld kann als homogen betrachtet werden.



$$dW = \frac{1}{2} \cdot dC \cdot (dU)^2 \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}C = \frac{\varepsilon \cdot dA}{dx} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}U = E \cdot dx$$

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot dA}{dx} \cdot (E \cdot dx)^2$$

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \cdot dA \cdot dx$$

$$\boxed{\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon}}$$

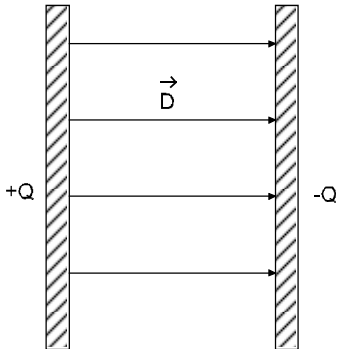
3.7.3 Kräfte zwischen zwei Elektroden

Rechenverfahren: Eine Elektrode wird alleine betrachtet und ihr Feld ermittelt.

In diesem Feld befindet sich die andere Elektrode, so dass auf deren Ladungen Kräfte einwirken. (vgl. 3.2.2)

Beispiel: Plattenkondensator:

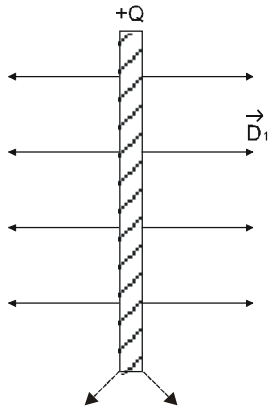
Originalanordnung (zwei Platten)



$$D = \frac{Q}{A}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A}$$

Feld der positiven Platte allein betrachtet (ohne 2. Platte!)



Streufeld am Plattenrand wird vernachlässigt

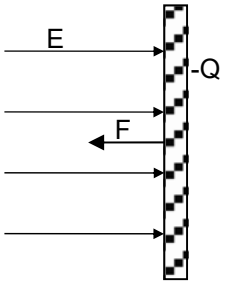
Die positive Ladung verteilt sich auf beide Seiten der 1. Platte.

$$Q = \oint D_1 \cdot dA = D_1 \cdot 2 \cdot A$$

$$D_1 = \frac{Q}{2 \cdot A} = \frac{1}{2} \cdot D$$

$$E_1 = \frac{Q}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} = \frac{1}{2} \cdot E$$

Damit verringern sich also auch *D* und *E* jeweils um die Hälfte.



Die Kraft auf die negative (2.) Platte folgt dann zu:

$$\vec{F} = -Q \cdot \vec{E}_1 = -\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \vec{E}$$

Anziehungskraft dem Betrage nach:

$$F = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A \cdot E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\varepsilon \cdot A}$$

Druck auf die Kondensatorplatten:

$$\frac{F}{A} = p = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E$$

Die Berechnung von Kräften im elektrischen Feld kann auch über die elektrostatische Feldenergie erfolgen. Man arbeitet dabei mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung. Dieses Prinzip soll hier, nochmals am Beispiel eines Plattenkondensators, gezeigt werden.

Bei dem Prinzip der virtuellen Verschiebung wird der Abstand zwischen den Platten um einen kleinen Betrag Δz verändert. Es wird dann die Änderung der Feldenergie berechnet. Die Kraftwirkung ist dabei der Änderung dieser Feldenergie proportional.

Auf Grund der entgegengesetzten Ladungen ziehen sich die beiden Platten eines Kondensators mit der Kraft F an. Werden die beiden Platten um den Betrag Δz auseinander gezogen, dann muss die mechanische Arbeit:

$$\Delta W = |F| \cdot \Delta z$$

aufgewendet werden. Gemäß dem Energieerhaltungssatz nimmt die Energie des Feldes um den gleichen Betrag zu. Vor der Änderung des Abstandes betrug die Feldenergie:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q^2$$

Durch die Verschiebung der beiden Platten ändert sich die Feldenergie um den Betrag:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot Q^2 \cdot \Delta\left(\frac{1}{C}\right)$$

Da die mechanische Arbeit bei diesem Vorgang gleich der Änderung der elektrischen Feldenergie sein muss, gilt:

$$|F| = \frac{1}{2} \cdot Q^2 \cdot \frac{\Delta\left(\frac{1}{C}\right)}{\Delta z}$$

Mit $\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon \cdot A}$ und nach Ersatz von d durch $d+\Delta z$ erhalten wir:

$$\frac{1}{C} + \Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{d}{\varepsilon \cdot A} + \frac{\Delta z}{\varepsilon \cdot A} \qquad \Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta z}{\varepsilon \cdot A}$$

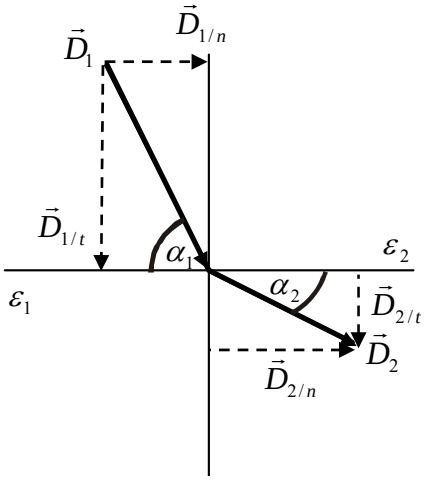
Setzen wir dies in die Gleichung für die Kraft ein, dann erhalten wir als Endergebnis für die Kraft zwischen den Platten eines Kondensators:

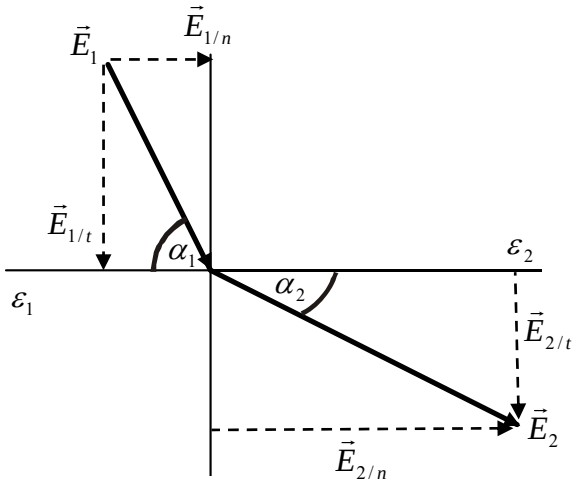
$$|F| = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\varepsilon \cdot A}$$

3.8 Bedingungen an Grenzflächen

Aus der Optik ist das Brechungsverhalten an Grenzflächen unterschiedlicher Medien bekannt. Wir betrachten im Folgenden die Grenzfläche zwischen zwei Materialien, die eine unterschiedliche Permittivitätszahl aufweisen. Wir gehen weiter davon aus, dass die Feldlinien, wie im nächsten Bild gezeigt, nicht senkrecht auf diese Grenzfläche auftreffen.

Aufgrund der unterschiedlichen Permittivitäten werden Betrag und Richtung der Feldstärke in beiden Materialien nicht gleich sein. Die Bedingung der Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes und der Gauß'sche Satz müssen jedoch auch an der Grenzfläche erfüllt sein.





$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \qquad hier: \varepsilon_1 > \varepsilon_2$$

Wir nehmen nun ein infinitesimal kleines Volumenelement (Scheibe) direkt an der Grenzschicht zwischen den beiden Materialien heraus:

Wirbelfreiheit:

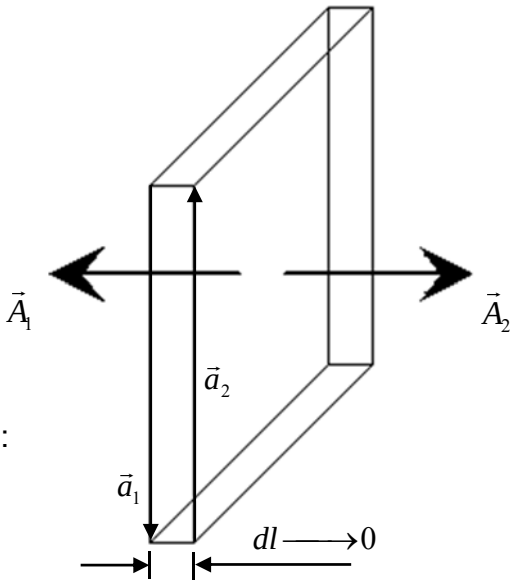
$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Satz von Gauß:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Materialgleichung:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$



$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$$

$$|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = A$$

A, a: jeweils infinitesimal klein

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E}_1 \cdot \vec{a}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{a}_2 = E_{1/t} \cdot a - E_{2/t} \cdot a = 0$$

$$\boxed{E_{1/t} = E_{2/t}}$$

Die Tangential-Komponente der elektrischen Feldstärke ist stetig

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \vec{D}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{A}_2 = -D_{1/n} \cdot A + D_{2/n} \cdot A = 0$$

Die Normal-Komponente der elektrischen Flussdichte ist stetig

$$\boxed{D_{1/n} = D_{2/n}}$$

Aus der Kombination beider Bedingungen und mit $D_{i/n} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{ri} \cdot E_{i/n}$ folgt:

$$\boxed{\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Diese Beziehung gilt aber nur, wenn kein elektrischer Strom fließt, d.h. an der Grenzfläche sind keine elektrischen Ladungen konzentriert (elektrostatisches Feld).

Wenn ein elektrisches Strömungsfeld (Abs. 4) gleichzeitig mit dem elektrostatischen Feld existiert, befinden sich elektrische Ladungen an der Grenzfläche. Dann gilt:

$$J_{1/n} = J_{2/n}$$

$$\kappa_1 \cdot E_{1/n} = \kappa_2 \cdot E_{2/n}$$

$$\frac{\kappa_1}{\varepsilon_1} \cdot D_{1/n} = \frac{\kappa_2}{\varepsilon_2} \cdot D_{2/n} \rightarrow \qquad \underline{D_{1/n} \neq D_{2/n}}$$

3.9 Materie im elektrischen Feld

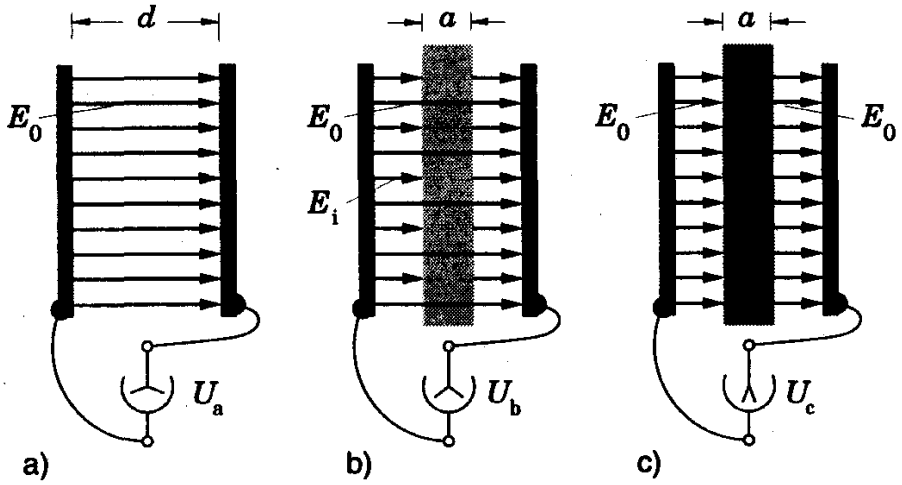
3.9.1 Feldstärke in Isolierstoffen

Die Platten eines Kondensators müssen durch eine isolierende Schicht voneinander getrennt werden. Im einfachsten Fall ist dies Luft. In vielen Fällen werden aber auch andere isolierende Materialien verwendet. Es stellt sich nun die Frage, welchen Einfluss diese Materialien auf das Feld eines Kondensators haben. Um dies zu untersuchen, wird das folgende Experiment durchgeführt.

Ein Plattenkondensator wird mit einer Ladung geladen, sodass sich zwischen den beiden Platten die Spannung U_a einstellt. Diese Ladung wird in den folgenden Schritten des Experiments nicht mehr geändert. Im nächsten Schritt wird nun eine isolierende Platte der Dicke *a* zwischen die beiden Platten des Kondensators geschoben, ohne die Kondensatorplatten zu berühren. Man stellt fest, dass sich die Spannung verändert. Der neue Wert wird mit U_b bezeichnet. In einem weiteren Schritt wird die isolierende Platte durch eine metallisierte Platte ersetzt. Es wird wieder die Spannung gemessen. Nun stellt sich der Wert U_c ein. Vergleicht man die Spannungswerte miteinander, so stellt man fest, dass die Spannung jeweils abgenommen hat. Es gilt daher [2]:

$$U_a > U_b > U_c$$

Da die Ladungen auf den Platten in allen drei Fällen gleich groß geblieben sind, muss auch die Feldstärke in dem materiefreien Raum konstant geblieben seien. Der Wert dieser Feldstärke beträgt: $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. σ ist die Flächenladungsdichte auf den Kondensatorplatten (3.3.3), sie entspricht der elektrischen Flussdichte *D*.



In den Fällen a) und c) können wir sofort die Spannung angeben, denn in der metallisierten Platte ist kein Feld vorhanden.

$$U_a = E_0 \cdot d \qquad U_c = E_0 \cdot (d - a)$$

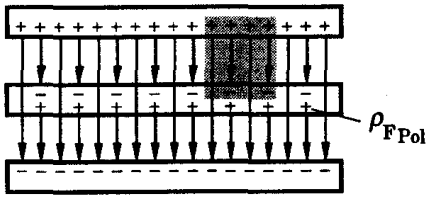
Im Falle b) mit der Platte aus dielektrischem Material muss gegenüber dem Fall c) ein weiterer Spannungsanteil hinzukommen, da die Spannung im Fall b) größer war. Wir können die Spannung U_b wie folgt ausdrücken:

$$U_b = E_0 \cdot (d - a) + E_i \cdot a$$

Auf Grund der Reihenfolge der Spannungswerte muss die Feldstärke im Isolationsmaterial E_i kleiner als die Feldstärke im freien Raum E_0 sein. Bei gegebener Ladung ist die Feldstärke im Materie erfüllten Raum kleiner als im Vakuum. Da die Isolatoren von einem elektrischen Feld durchdrungen werden können, werden sie auch als Dielektrika bezeichnet.

In den Dielektrika ist eine elektrische Feldstärke vorhanden, die kleiner ist als die Feldstärke des freien Raumes. Es muss daher eine Ladungstrennung stattgefunden haben. Sie ist jedoch im Vergleich zur Ladungstrennung in der Metallplatte deutlich kleiner. Die Ladungen in Dielektrika werden als Polarisationsladungen bezeichnet.

Wendet man den Gauß'schen Satz auf das Dielektrikum an, so ergibt sich für die resultierende Erregung im Dielektrikum die Ladungsdichte der Kondensatorplatten minus der Ladungsdichte der Polarisationsladungen [2]:



$$|D_i| = \varepsilon_0 \cdot |E_i| = \sigma - \sigma_i$$

Der Dichte der Polarisationsladungen σ_i ordnen wir den Vektor P zu. Für die gesamte Erregung im Dielektrikum können wir somit schreiben:

$$D = D_i + P$$

Diese Gleichung besagt, dass sich die gesamte Erregung D, die von den Quellen auf den Platten ausgeht, im Dielektrikum aufteilt in die innere Erregung D_i und eine Gegenerregung oder Polarisation P.

Diese Zusammenhänge wurden hier für einen Plattenkondensator aufgestellt. Sie haben jedoch allgemeine Gültigkeit. Die Polarisation P ist im einfachsten Fall proportional dem im Inneren des Dielektrikums herrschenden, elektrischen Feld. Mit der Definition einer weiteren Konstanten, genannt Suszeptibilität χ, drückt man dies wie folgt aus:

$$P = \chi \varepsilon_0 E_i$$

Durch die Einführung der Permittivitätszahl (früher: relative Dielektrizitätskonstante) ε_r kann die Verwendung des Polarisationsvektors P vermieden werden. Es gilt dann:

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

Stoff	ε_r	Stoff	ε_r
Luft	1,00059	Quarz	3,8...5
Petroleum	2,0	Glas	5...7
Polyäthylen	2,3	Keramik	9,5...100
Polystyrol	2,6	Diamant	16,5
Gummi	2,5...3,5	Nitrobenzol	36,0
Bernstein	2,8	Destilliertes Wasser	81,0

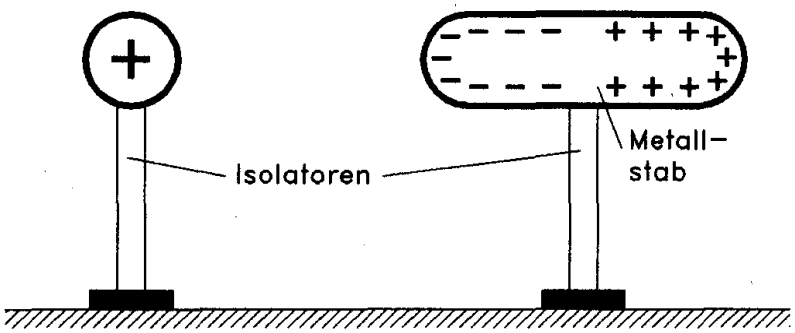
Wird ein Kondensator vollkommen mit Dielektrikum ausgefüllt, dann erhöht sich seine Kapazität um den Faktor ε_r gegenüber dem Vakuumwert. Dabei verringert sich die Feldstärke bei gleicher Ladung auf den Platten überall um denselben Faktor. Will man also Kondensatoren mit kleinen Abmessungen aber großer Kapazität bauen, dann muss man ein Dielektrikum verwenden, welches eine hohe Permittivitätszahl hat. Dieses Isolationsmaterial muss zusätzlich eine hohe Durchschlagfestigkeit aufweisen, damit die Abstände und Oberflächen der Platten klein gehalten werden können.

Es ist wichtig zu erwähnen, dass nicht bei allen Stoffen die Permittivitätszahl als unabhängig von der elektrischen Feldstärke angenommen werden kann.

3.9.2 Influenz

Bringt man, wie im nächsten Bild gezeigt, einen Metallstab in das von einer positiv geladenen Kugel erzeugte Feld, so findet in dem Metallstab eine Ladungstrennung statt. Er weist an seinem Ende Ladungen auf, und zwar eine positive Ladung am der Kugel abgewendeten und eine negative am der Kugel zugewendeten Ende. Man bezeichnet diese Ladungen als Influenzladungen. Das Vorhandensein dieser Ladungen kann man mit einer kleinen metallischen Probekugel, mit der man durch Berührung Ladungen an den Enden des Stabes entnimmt und auf ihre Polarität untersucht, nachprüfen [2].

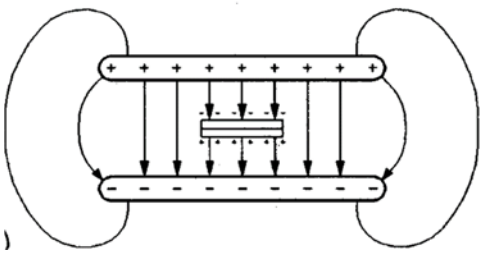
Berücksichtigt man die Anziehung negativer Ladung und die Abstoßung positiver Ladung, so ist die Ladungstrennung leicht zu erklären.

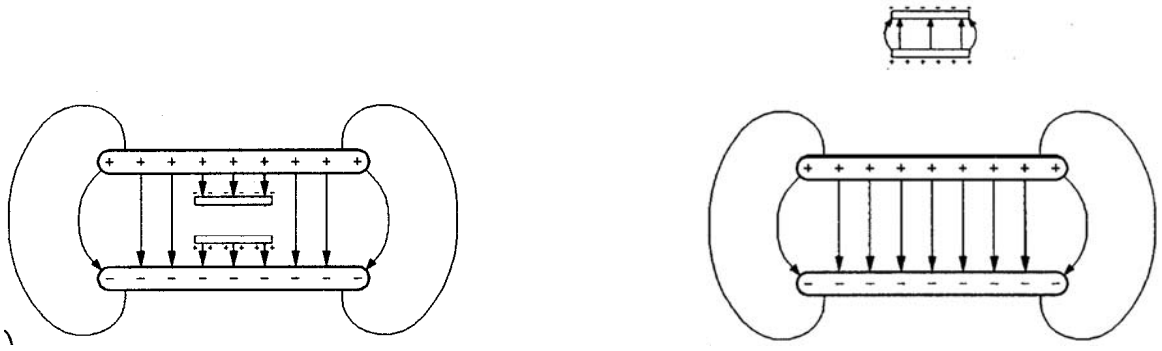


Die Influenz erklärt auch, warum eine ungeladene, metallisierte Kugel von einem geladenen Stab angezogen wird. Die anziehende Kraft auf die influenzierten Ladungen auf der dem Stab zugewandten Seite ist größer als die abstoßende Kraft auf die anderen Ladungen. Die negativen Ladungen im Bild sind näher an der Kugel und befinden sich deshalb in einem Bereich mit höherer Feldstärke.

Die Größe der influenzierten Ladung kann man bestimmen, indem man die beiden unterschiedlich geladenen Teile des Stabes noch im Feld voneinander trennt und dann beide Teile für sich außerhalb des Feldes untersucht. Anstelle eines Stabes nimmt man hier besser 2 gleiche Metallscheiben, die mit isolierenden Griffen gehalten werden können und in ein homogenes elektrisches Feld (Plattenkondensator) gebracht werden. Ist die Anordnung mit zwei Scheiben genügend dünn, dann wird das homogene Feld nicht merklich geändert, solange die Scheiben zusammen sind und senkrecht zum Feld liegen.

Die beiden Platten werden auseinander gezogen und dann aus dem Feld herausgebracht. Die im homogenen Feld des Plattenkondensators entstandenen, influenzierten Ladungen können auch jetzt noch nachgewiesen und gemessen werden [2].





In einem weiteren Versuch werden nun die Scheibenfläche *A* und die elektrische Feldstärke *E* variiert. Dieser Versuch ergibt folgenden Zusammenhang mit der influenzierten Ladung:

$$Q_i = \varepsilon_0 \cdot A \cdot |E|$$

Bei obiger Gleichung wurde von einem homogenen elektrischen Feld ausgegangen. Diese Gleichung kann jedoch auch für ein inhomogenes Feld angewendet werden, wenn die Fläche sehr klein gemacht wird. Für die Ladung ΔQ auf dieser kleinen Fläche gilt dann:

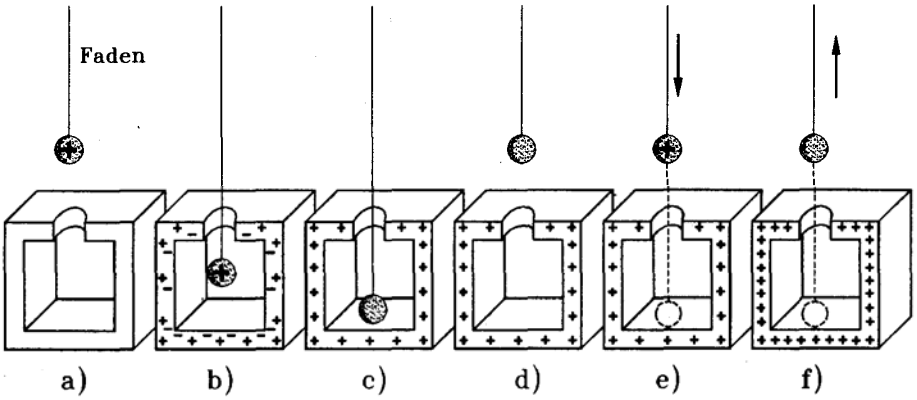
$$\Delta Q_i = \varepsilon_0 \cdot \Delta A \cdot |E|$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch das Flächenelement ΔA, so ergibt sich eine Gleichung für die Flächenladungsdichte, das heißt für die Ladung pro Flächeneinheit der influenzierten Ladungen (3.3.3):

$$\sigma_i = \varepsilon_0 \cdot |E|$$

3.9.3 Faraday‘scher Becherversuch

Der nächste Versuch wird uns weitere Erkenntnisse liefern und außerdem das Grundprinzip der Influenzmaschinen erläutern. Wir verwenden einen ungeladenen Metallkasten, der auf einen isolierenden Fuß aufgestellt wird und auf seiner Oberseite eine kleine Öffnung besitzt [1].



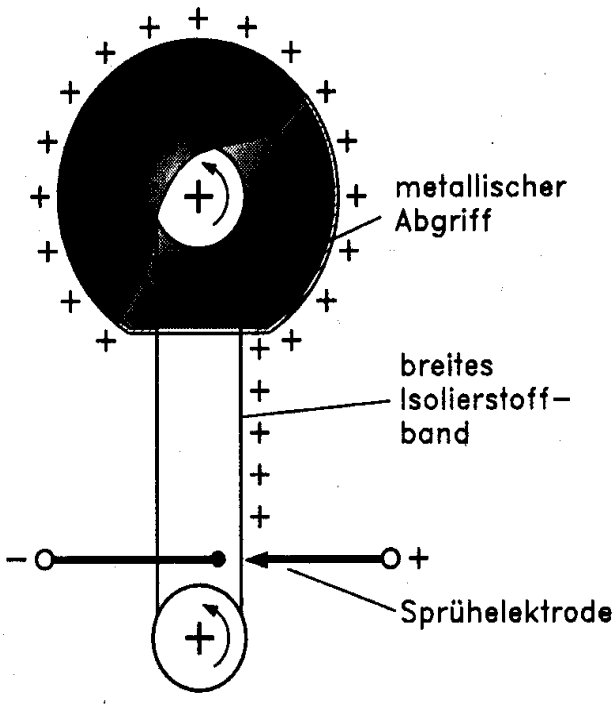
In (a) wird eine positiv geladene Kugel in den Kasten eingebracht. Dabei wird die Wand des Kastens nicht berührt. In der Wand des Kastens findet eine Ladungstrennung statt (b). Negative Ladungen sammeln sich an der Innenseite, positive Ladung an der Außenseite. Nun wird das elektrische Feld außerhalb des Kastens überprüft. Man stellt fest, dass dieses unabhängig von der Position der Kugel im Kasten ist.

In (c) berührt die Kugel den Kasten. Die Ladung der Kugel geht über in die Wand des Kastens. Dieser ist jetzt positiv geladen; die Kugel hat ihre Ladung abgegeben und kann jetzt auch heraus gehoben werden (d). Außerhalb des Kastens hat dieser Vorgang keinen Einfluss auf das elektrische Feld. Hieraus lässt sich ableiten: Die Gesamtgröße der influenzierten Ladungen auf der Innen- und Außenseite des Kastens ist betragsmäßig jeweils gleich der Größe der Ladung der Kugel.

Das Ergebnis kann auch wie folgt angegeben werden: die Kugel gibt bei Berührung mit dem Kasten ihre gesamte Ladung an diesen ab. Die Ladung wandert an die Außenseite, weil im ladungsfreien Inneren eines leitenden Hohlkörpers kein Feld existieren kann.

In (e) und (f) wird das Eintauchen der geladenen Kugel mehrmals wiederholt und damit weitere Ladungen auf den Kasten übertragen.

Dieser zuletzt geschilderte Vorgang wird bei einem elektrostatischen Generator kontinuierlich durchgeführt. Er wird auch als Van de Graaff'scher Bandgenerator bezeichnet. Die Beförderung der Ladung in das Innere einer metallischen Hohlkugel erfolgt über ein Band aus Isolierstoff, auf das die Ladungen mit einer Sprühelektrode aufgebracht werden. Unter Sprühelektroden versteht man Metallspitzen. An leitenden Spitzen kann die Feldstärke so hoch werden, dass die Isolationsfestigkeit der Luft überschritten ist. In diesem Fall werden die aus der Spitze austretenden Ladungsträger vom Isolierstoffband aufgenommen. Mit einem solchen Generator lassen sich Spannungen bis zu über 10 MV erzeugen [1].



4. Elektrisches Strömungsfeld

Wir beschäftigen uns nun mit einem Feld, das von elektrischen Strömungen verursacht wird, d.h. es fließen Ströme bzw. es bewegen sich elektrische Ladungen. Das Feld ist dabei stationär, also zeitlich unveränderlich.

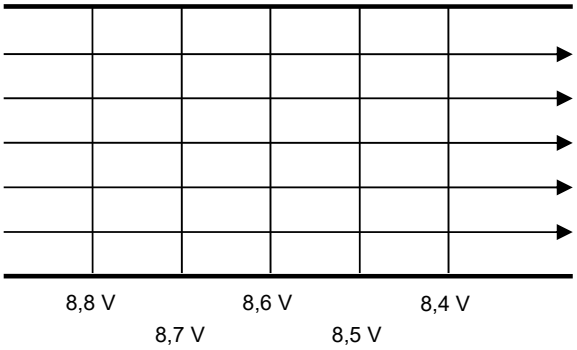
4.1 Elektrische Stromdichte und Feldstärke

4.1.1 Stromlinien und Äquipotenzialflächen

Wir betrachten Stromlinien und Äquipotenzialflächen in einem homogenen Draht konstanten Querschnitts.

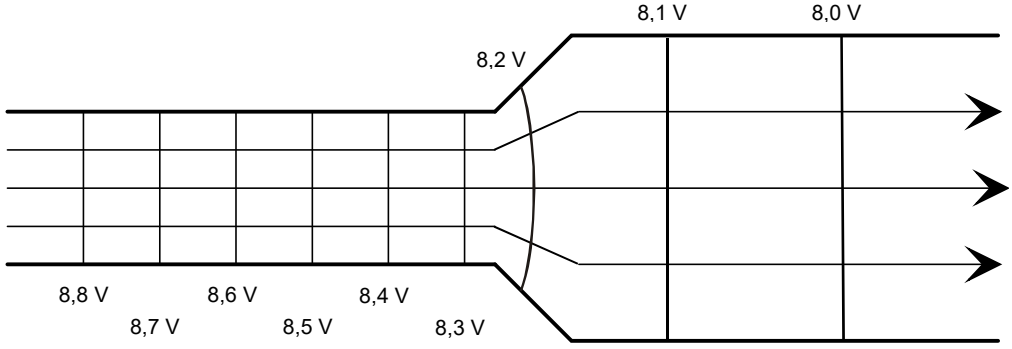
Stromlinien sind mögliche Bahnkurven, die die elektrischen Ladungen unter dem Einfluss einer äußeren Spannung zurücklegen können. Die Dichte der Stromlinien ist ein Maß für die Stromdichte.

Äquipotenzialfläche ist eine Fläche gleichen elektrischen Potenzials, d.h. zwischen allen Punkten auf einer Äquipotenzialfläche existiert keinerlei Spannung.



Im homogenen Feld verteilt sich der Strom gleichmäßig über den Querschnitt. Die Stromlinien sind damit parallel (Stromlinien können sich nicht schneiden) und überall gleich dicht.
Die Spannung fällt gleichmäßig längs des Drahtes ab. Damit sind auch die Äquipotenzialflächen parallel und jeweils im gleichen Abstand (äquidistant).

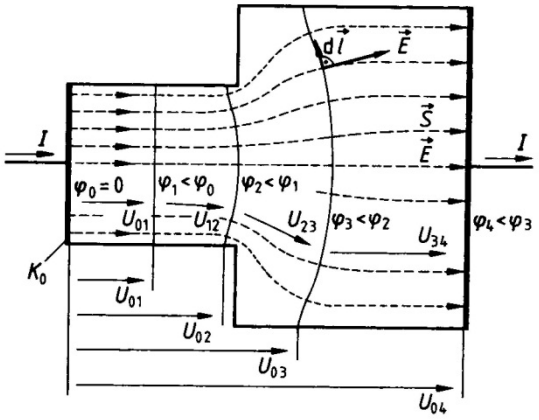
Bei einer Querschnittsänderung des Drahtes müssen sich die Abstände der Stromlinien im inhomogenen Bereich verändern. Damit sind auch die Äquipotenzialflächen nicht mehr im gleichen Abstand.



Erkenntnis: Stromlinien und Äquipotenzialflächen stehen aufeinander senkrecht.

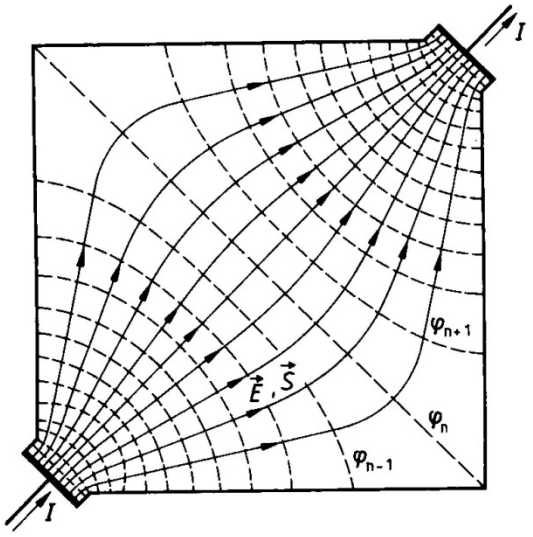
Zwei weitere Beispiele sollen diese Zusammenhänge im quasi-ebenen (zwei-dimensionalen) Strömungsfeld zeigen [1].

Draht mit Querschnittsänderung:



Anmerkung: In deutschen Fachbüchern findet man die Stromdichte häufig mit dem Symbol *S* anstelle *J*.

Quadratische Platte, an zwei Ecken kontaktiert:



Elektrische Ladungen fließen auf dem kürzesten Wege von einer Äquipotenzialfläche zur nächsten. Daher schneiden die Stromlinien die Äquipotenzialflächen senkrecht.

Analogie: Wasser fließt auch entlang der Falllinien (= Stromlinien) von einer Höhenlinie (= Äquipotenzialfläche) zur nächsten.

4.1.2 Elektrische Stromdichte

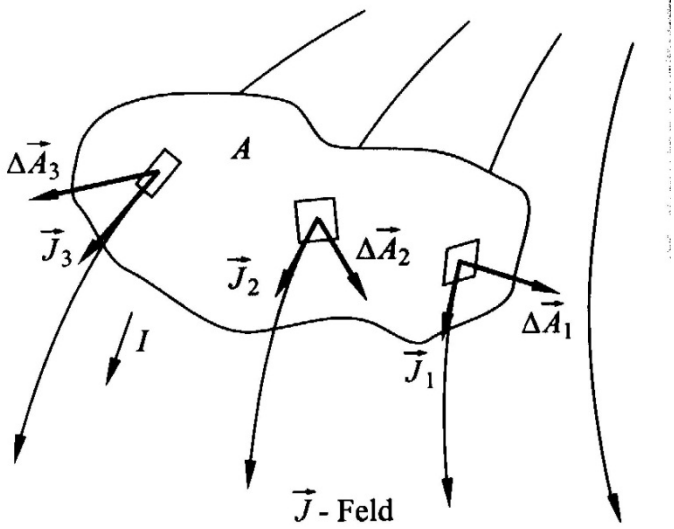
Stromdichte = Strom pro Fläche

Beim homogenen Draht mit konstantem Querschnitt ist der Zusammenhang einfach:

$$\boxed{J = \frac{I}{A}}$$

Bei örtlich unterschiedlicher Stromdichte (inhomogenes Feld) muss man die betrachtete Fläche so klein wählen, dass die Stromdichte über die ganze Fläche konstant ist. Dies gelingt, wenn man die Fläche infinitesimal klein macht:

$$J \approx \frac{\Delta I}{\Delta A} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{J = \frac{dI}{dA}}$$

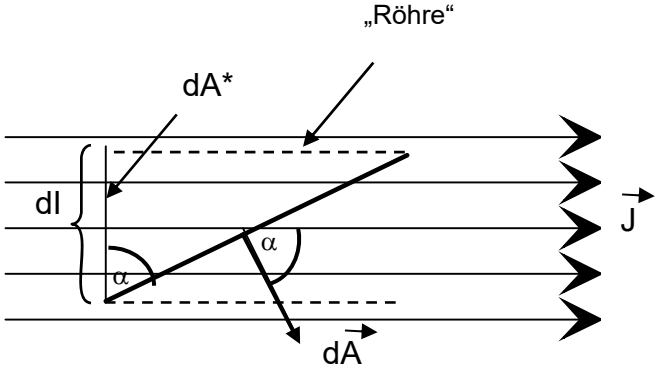


Die Voraussetzung in allen Fällen ist:
Die jeweilige Fläche ΔA bzw. dA muss senkrecht zur Stromrichtung stehen, d.h. $\vec{J}$ und $d\vec{A}$ müssen dieselbe Richtung aufweisen [1].

Einheit [J] = A/m^2

Es gilt natürlich auch umgekehrt: $dI = J \cdot dA$ und $\boxed{I = \int_A J \cdot dA}$

Wenn aber $\vec{J}$ und $d\vec{A}$ nicht dieselbe Richtung aufweisen:



Infinitesimal kleiner Ausschnitt aus einem inhomogenen Strömungsfeld

Der Flächenvektor $d\vec{A}$ steht senkrecht auf der Fläche. Bei einer geschlossenen Hülle weist der Flächenvektor $d\vec{A}$ stets nach außen.

Damit ergibt sich der Strom in der dargestellten “Röhre”:

$dI \neq J \cdot dA$ sondern

$$dI = J \cdot dA^*$$

$$dI = J \cdot dA \cdot \cos\alpha$$

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$I = \int_A dI$$

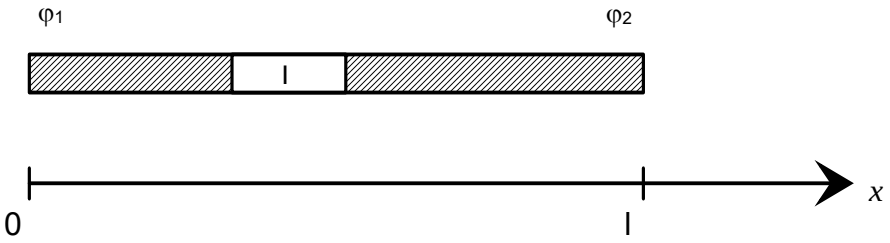
$$\boxed{I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}$$

4.1.3 Elektrische Feldstärke

Die elektrische Feldstärke gibt an, wie stark das Potenzial in Abhängigkeit vom Ort abnimmt:

Elektrische Feldstärke = Potenzialgefälle

Einfachster Fall: Homogener Draht konstanten Querschnitts:



Das Potenzial nimmt linear über der Länge *l* des Drahtes ab. Es gilt:

$$E = \frac{U}{l} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$$

Wenn der Drahtwiderstand nicht gleichmäßig über die Drahtlänge verteilt ist, z.B. weil die Leitfähigkeit örtlich verschieden ist oder der Querschnitt sich ändert, gilt aber:

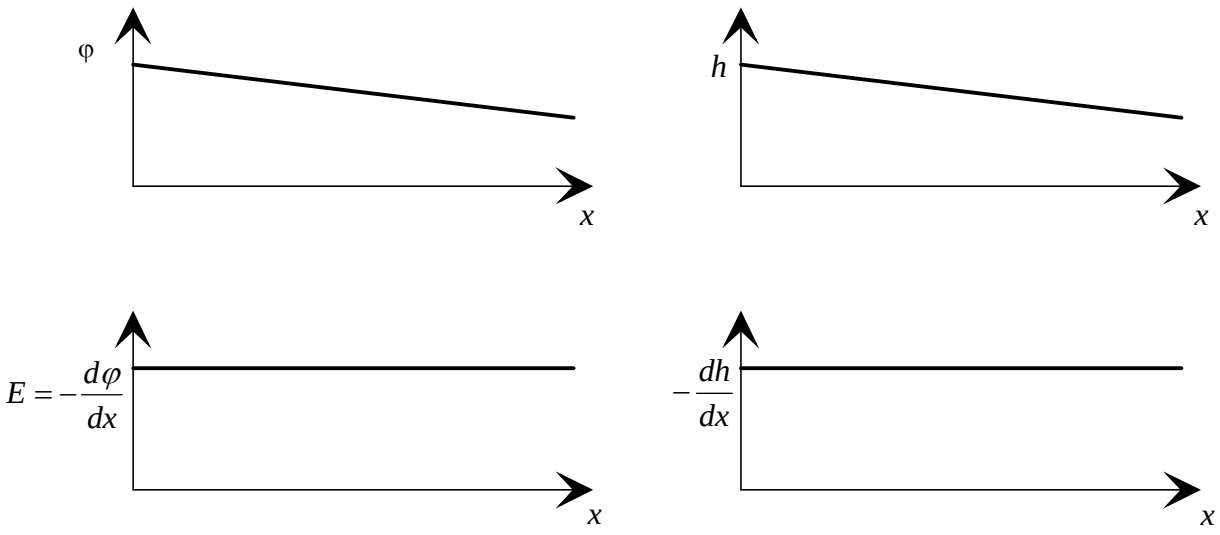
$$E = -\frac{d\varphi}{dx}$$ Potenzialabnahme pro Wegelement

Einheit [*E*] = V/m

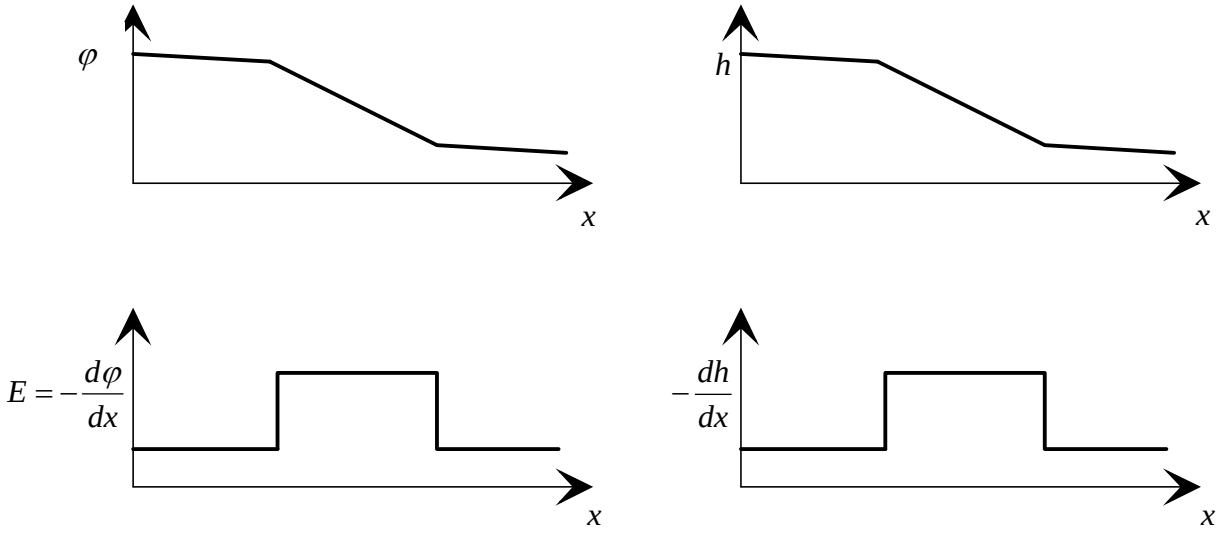
Wir können uns den Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Potenzial auch mit einer einfachen Analogie deutlich machen, dem Gefälle einer Straße.

Analogie: Elektrische Feldstärke in einem Draht ↔ Gefälle einer Straße

1. Homogener Draht konstanten Querschnitts — gleichmäßig abschüssige Straße



2. Inhomogener Draht Straße mit wechselndem Gefälle



Versuchen wir, die Zusammenhänge allgemeiner zu formulieren, zunächst für eine zweidimensionale Betrachtung:

Das Gefälle an einem Punkt im Gelände lässt sich formulieren als:→ $-\frac{dh}{dl}$

Diese Aussage ist jedoch noch nicht eindeutig, denn der Wert von $-dh/dl$ hängt von der Richtung von *dl* ab. Der Begriff „Gefälle“ meint hier stets das Gefälle in Richtung der Falllinie. Das Gefälle hat also nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung, d.h. das Gefälle ist ein Vektor!

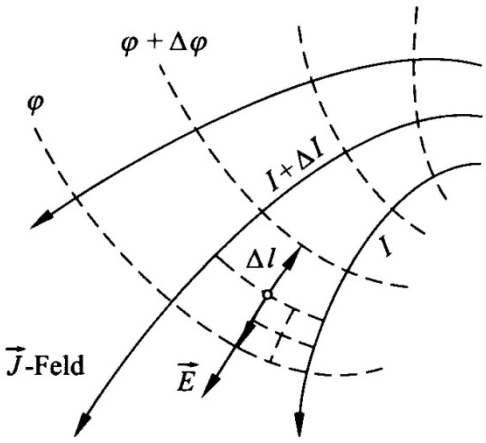
Dafür gibt es ein mathematisches Hilfsmittel: Gradient

grad *h* ist ein Vektor

mit $|grad\ h| = \frac{dh}{dl}$ und $\frac{grad\ h}{|grad\ h|} = \frac{d\vec{l}}{dl}$

$d\vec{l}$ ist das Wegelement in Richtung des größten Anstiegs

Der Betrag von **grad *h*** gibt den Betrag der Steigung an, die Richtung von **grad *h*** die Richtung der Steigung.



Das Gefälle hat denselben Betrag wie die Steigung, aber die entgegengesetzte Richtung [1]:

Gefälle = - grad *h*

Die gleiche Überlegung gilt auch für das Potenzialgefälle:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi}$$

Diese Gleichung für $\vec{E}$ kann unverändert auch auf dreidimensionale Felder übertragen werden.

Zur Ermittlung der Richtung von grad φ (= Richtung des größten Anstiegs) ist die Potenzialänderung in Richtung der drei Raumkoordinaten zu bestimmen (hier für kartesische Koordinaten):

Definition: $$\boxed{grad\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

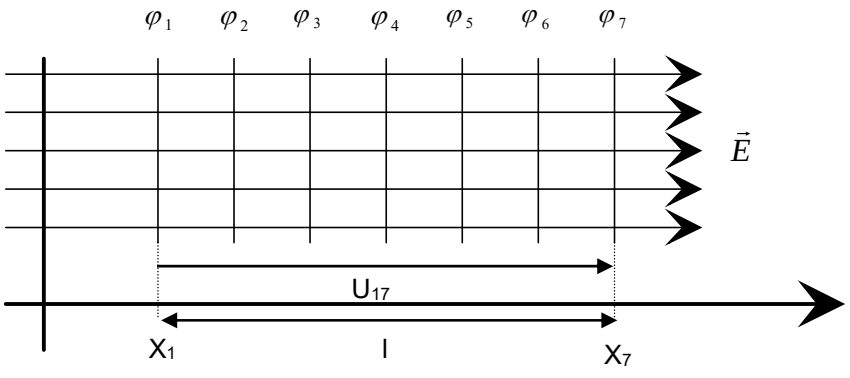
Damit können wir den Zusammenhang zwischen Spannung und elektrischer Feldstärke wie folgt formulieren

1. Für ein homogenes elektrisches Feld:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\varphi_7 - \varphi_1}{x_7 - x_1}$$

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_7}{x_7 - x_1} = \frac{U_{17}}{l}$$

$$\rightarrow \boxed{U_{17} = E \cdot l}$$

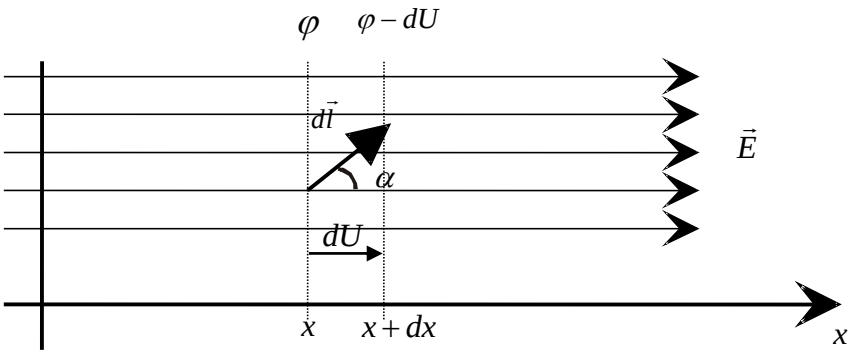


2. Für einen infinitesimal kleinen Ausschnitt aus einem inhomogenen elektrischen Feld:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\varphi - dU - \varphi}{dx}$$

$$E = \frac{dU}{dx}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{dU = E \cdot dx}$$



Wenn der Feldstärkevektor $\vec{E}$ und der Wegelementvektor $d\vec{l}$ nicht dieselbe Richtung haben, gilt:

$$dU = E \cdot dl \cdot \cos\alpha = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Der Integrationsweg ist beliebig; er muss nur bei P_1 beginnen und bei P_2 enden.

$$\boxed{U = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

4.2 Ohm‘sches Gesetz in Differenzialform

Das aus der Netzwerk-Lehre bekannte Ohm‘sche Gesetz kann nun, unter Verwendung der physikalischen Größen Stromdichte und elektrische Feldstärke, auch allgemein, d.h. in Differenzialform, formuliert werden.

4.2.1 Verallgemeinerte Knotenregel

Wir wissen: An einem Knoten muss die Summe aller Ströme 0 sein. Ersetzen wir die Ströme durch die über die jeweiligen Flächen integrierten Stromdichten, so ergibt sich:

$$\boxed{\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0}$$

Um den Knoten nachzubilden, muss die Integration über eine geschlossene Oberfläche erfolgen.

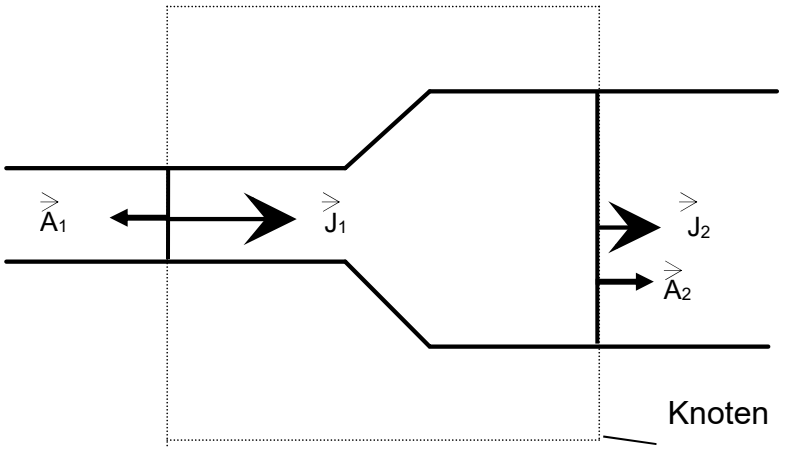
Beispiel:

$$\vec{J}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{J}_2 \cdot \vec{A}_2 = 0$$

$$-J_1 \cdot A_1 + J_2 \cdot A_2 = 0$$

$$J_1 \cdot A_1 = J_2 \cdot A_2$$

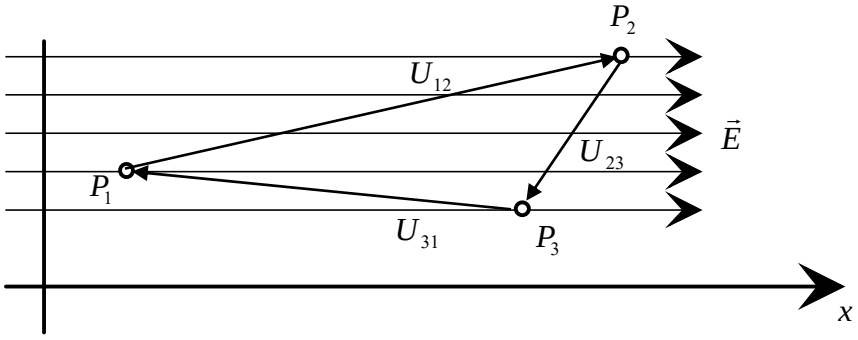
$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{A_1}{A_2}$$



4.2.2 Verallgemeinerte Maschenregel

Wir wissen: In einer Masche ist die Summe aller Spannungen gleich Null:

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$$



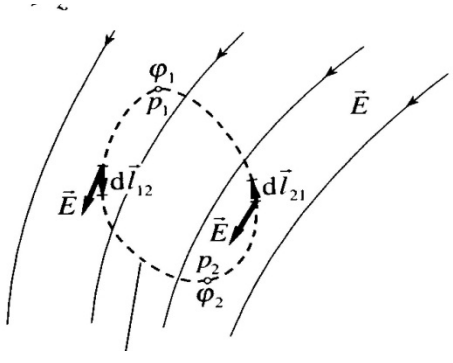
Ersetzt man die Spannungen durch die Integrale über die elektrischen Feldstärken, erhält man:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_2}^{P_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_3}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Verallgemeinerung:

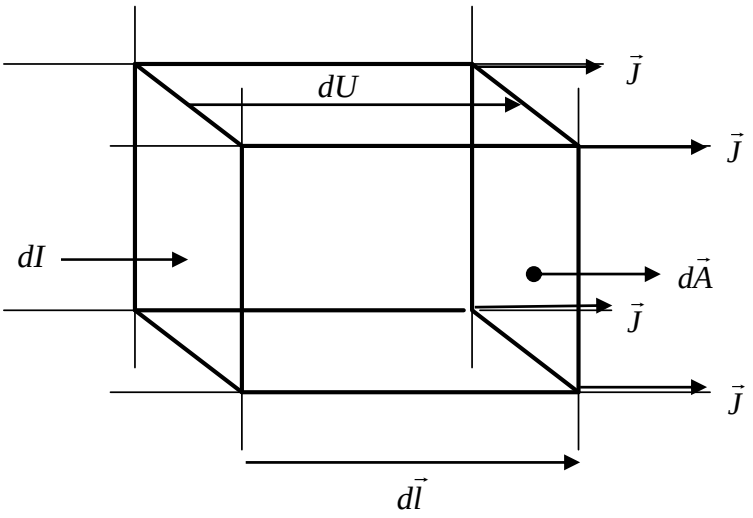
In einem stationären (zeitunabhängigen) elektrischen Feld ist die Gesamtspannung entlang einer geschlossenen Kurve gleich Null.

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$



Die elektrische Strömung folgt dem Potenzialgefälle. Daher haben die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die Stromdichte $\vec{J}$ dieselbe Richtung [1].

4.2.3 Ohm‘sches Gesetz



Das Ohm‘sche Gesetz wird nun angewendet auf einen Quader, der begrenzt wird durch:

- 2 Äquipotenzialflächen
- 4 Stromlinien

Im inhomogenen Feld wird ein solcher Körper zu einem Quader, wenn man seine Abmessungen wieder infinitesimal klein werden lässt.

Es gelten folgende Gleichungen:

$$dU = R \cdot dI$$

$$dU = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl$$

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \cdot dA$$

$\Leftarrow$

Berücksichtigt werden kann:

$d\vec{l}$ weist in Richtung von $\vec{J}$

$\vec{J}$ und $\vec{E}$ haben dieselbe Richtung

$d\vec{A}$ steht senkrecht auf der Äquipotenzialfläche

d.h.: $\vec{J}$, $\vec{E}$, $d\vec{l}$, $d\vec{A}$ haben alle dieselbe Richtung

Wir können damit schreiben:

$$R = \frac{\rho \cdot dl}{dA} = \frac{dl}{\kappa \cdot dA}$$

$$\Rightarrow \quad E \cdot dl = \frac{\rho \cdot dl}{dA} \cdot J \cdot dA$$

$$\Rightarrow \quad E = \rho \cdot J$$

ρ: spezifischer Widerstand
κ: Leitfähigkeit

Allgemein kann man also die Zusammenhänge formulieren.

$$\boxed{\vec{E} = \rho \cdot \vec{J}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}}$$

Dies ist eine verallgemeinerte, differenzielle Schreibweise für das Ohm‘sche Gesetz.

4.3 Technische Strömungsfelder, Widerstandsberechnungen

Im Folgenden wird der Widerstand verschiedener, technisch interessanter Anordnungen (Strömungsfelder) berechnet. Bildet man jeweils den Leitwert als Kehrwert des Widerstandes, wird die Dualität zum elektrostatischen Feld (Kap. 3.6) deutlich.

4.3.1 Methoden zur Widerstandsberechnung

Für die Widerstandsberechnung gibt es zwei prinzipielle Methoden:

- Eingeprägter Strom *I*
- Eingeprägte Spannung *U*.

Methode *I-J-E-U-R*

Bei dieser Methode wird ein Teststrom *I* eingeprägt und der resultierende Spannungsabfall *U* bestimmt. Diese Methode ist immer dann sinnvoll, wenn die elektrische Stromdichte auf einer Äquipotenzialfläche überall den gleichen Betrag aufweist und in eine Richtung des gewählten Koordinatensystems zeigt.

I → Teststrom vorgeben

J → Symmetrie → $\boxed{\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}}$ ($\left|\vec{J}\right|$ auf Äquipotenzialfläche *A* konstant)

E → $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa}$

U → $U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ Integration entlang Feldlinie *s*

R → $R = \frac{U}{I}$

Beispiel: Homogenes Feld, Zylinderfeld, Kugelfeld (4.3.2 – 4.3.4), Reihenschaltung von Widerständen (4.3.5)

Methode *U-E-J-I-R*

Bei dieser Methode wird an dem Widerstand eine Testspannung *U* eingeprägt und der resultierende Strom *I* bestimmt. Diese Methode ist immer dann sinnvoll, wenn die elektrische Feldstärke entlang einer Feldlinie überall den gleichen Betrag aufweist und in eine Richtung des gewählten Koordinatensystems zeigt.

U → Testspannung vorgeben

E → Symmetrie → $\boxed{\vec{E} = -\text{grad}\varphi}$ ($|\vec{E}|$ entlang Feldlinie *s* konstant)

J → $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$

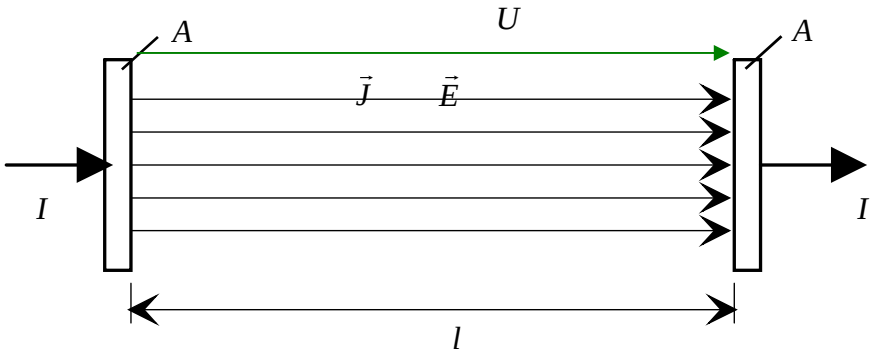
I → $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ Integration über Äquipotenzialfläche *A*

R → $R = \frac{U}{I}$

Beispiel: Homogenes Feld (4.3.2), Parallelschaltung von Widerständen (4.3.6)

4.3.2 Homogenes Feld

Im homogenen Feld sind sowohl die Stromdichte $\vec{J}$ als auch die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ nicht vom Ort abhängig. Damit können beide Methoden der Widerstandsberechnung angewandt werden.



Zwei mögliche Rechengänge

- ausgehend vom Strom *I* (Methode *I-J-E-U-R*)

$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \cdot A \qquad J = \frac{I}{A}$

$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J} \qquad E = \rho \cdot \frac{I}{A}$

$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot l \qquad U = \frac{\rho \cdot l}{A} \cdot I$

$R = \frac{U}{I} \qquad R = \frac{\rho \cdot l}{A}$

$E = \rho \cdot \frac{I}{A},\ I = \frac{U}{R},\ R = \frac{\rho \cdot l}{A}$

$E(U) = \frac{\rho \cdot U \cdot A}{A \cdot \rho \cdot l} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E(U) = \frac{U}{l}}}$

- ausgehend von der Spannung *U* (Methode *U-E-J-I-R*)

$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot l \qquad E = \frac{U}{l}$

$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \qquad J = \frac{\kappa \cdot U}{l}$

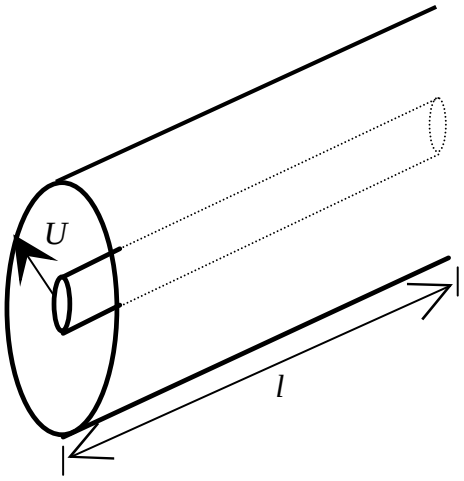
$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \cdot A \qquad I = \frac{\kappa \cdot A}{l} \cdot U$

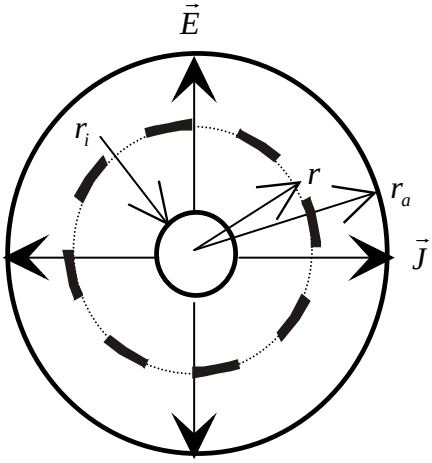
$R = \frac{U}{I} \qquad R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$

$J = \frac{\kappa \cdot U}{l},\ U = R \cdot I,\ R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$

$J(I) = \frac{\kappa \cdot l \cdot I}{l \cdot \kappa \cdot A} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{J(I) = \frac{I}{A}}}$

4.3.3 Zylinderfeld





Konstante Stromdichte auf den Äquipotenzialflächen

→ Rechengang: Methode *I-J-E-U-R*

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \qquad \rightarrow \qquad J = \frac{I}{2\pi \cdot l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{J} \qquad \rightarrow \qquad E = \frac{I}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_i}^{r_a} E \cdot dr = \frac{I}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{I}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \ln r \Big|_{r_i}^{r_a} \qquad \rightarrow \qquad U = \frac{I}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

$$R = \frac{U}{I} \qquad \rightarrow \qquad R = \frac{1}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

Setze ein: $E = \frac{I}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \frac{1}{r}$ $\quad I = \frac{U}{R}$ $\quad R = \frac{1}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$

$$E(U) = \frac{U}{2\pi \cdot \kappa \cdot l \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \kappa \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{E(U) = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \frac{1}{r}}}$$

Der Maximalwert von *E* tritt auf bei $r = r_i$ → $E_{\max} = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \frac{1}{r_i}$

Formulieren wir noch eine Zusatzfrage: Wie groß ist r_i bei vorgegebenem Außenradius r_a und konstanter Spannung *U* zu wählen, damit E_{max} einen möglichst kleinen Wert annimmt? Man nennt dies: optimales Radienverhältnis.

Vorgehensweise: Wir bilden die 1. Ableitung von E_{max} nach r_i. Diese muss für ein Extremum gleich 0 sein.

$$\frac{dE_{\max}}{dr_i} = U \cdot \frac{d}{dr_i}\left(\frac{1/r_i}{\ln\left(r_a/r_i\right)}\right)$$

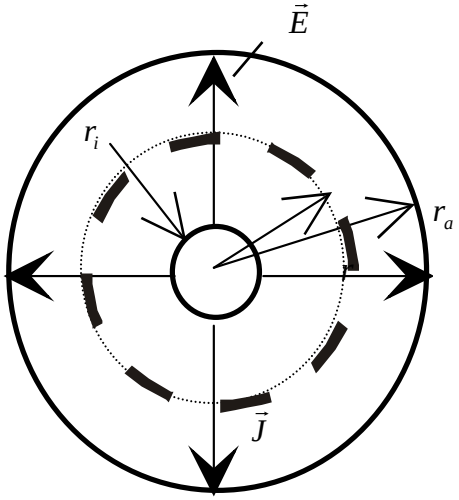
Quotientenregel für Ableitungen: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\frac{dE_{\max}}{dr_i} = U \cdot \frac{-\frac{1}{r_i^2}\cdot\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) - \frac{1}{r_i}\cdot\frac{1}{r_a/r_i}\cdot\left(-\frac{r_a}{r_i^2}\right)}{\left[\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right]^2} = \frac{U}{r_i^2\cdot\left[\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right]^2}\cdot\left[1-\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right]$$

$$\frac{dE_{\max}}{dr_i} = 0 \quad \rightarrow \quad 1-\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = 1 \quad \rightarrow$$

Für ein optimales Radienverhältnis muss also gelten: $\frac{r_a}{r_i} = e = 2{,}718$

4.3.4 Kugelfeld



Konstante Stromdichte auf den Äquipotenzialflächen

→ Rechengang: Methode *I-J-E-U-R*

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = J\cdot 4\pi\cdot r^2 \quad \rightarrow \quad J = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa}\cdot\vec{J} \quad \rightarrow \quad E = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$U = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{r_i}^{r_a} E\cdot dr = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\int_{r_i}^{r_a}\frac{1}{r^2}\cdot dr = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_i}^{r_a} = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\left(-\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_i}\right)$$

$$\rightarrow \quad U = \frac{I}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{r_a - r_i}{r_a\cdot r_i}$$

$$R = \frac{U}{I} \quad \rightarrow \quad R = \frac{1}{4\pi\cdot\kappa}\cdot\frac{r_a - r_i}{r_a\cdot r_i}$$

Setze ein: $E = \frac{I}{4\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{r^2}$ $I = \frac{U}{R}$ $R = \frac{1}{4\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r_a - r_i}{r_a \cdot r_i}$

$$E(U) = \frac{U}{4\pi \cdot \kappa \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r_a - r_i}{r_a \cdot r_i}} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E(U) = \frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i} \cdot \frac{U}{r^2}}}$$

Eine wichtige Anwendung des Kugelfeldes ergibt sich für Halbkugeln. Als Beispiel soll ein Halbkugel-Erder behandelt werden.

Es handelt sich dabei um ein halbes Kugelfeld mit $r_a \to \infty$

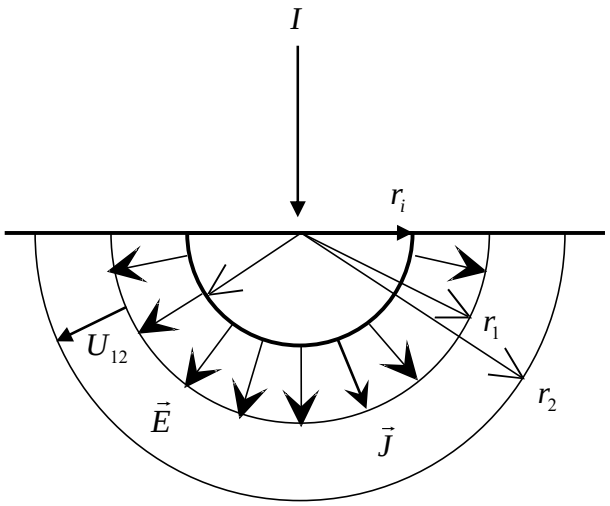
$$R = 2 \cdot \lim_{r_a \to \infty} \frac{1}{4\pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r_a - r_i}{r_a \cdot r_i}$$

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot \kappa} \cdot \lim_{r_a \to \infty} \cdot \frac{r_a}{r_a \cdot r_i}$$

Nun lässt sich der Übergangswiderstand zur “fernen Erde” bestimmen ($r_a \to \infty$):

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot \kappa \cdot r_i} = \frac{\rho}{2\pi \cdot r_i}$$

Weil nur die halbe Querschnittsfläche für die Stromführung zur Verfügung steht, sind $\vec{J}$ und $\vec{E}$ bei gleichem Strom *I* doppelt so groß wie beim (Voll-) Kugelfeld



$$\underline{\underline{J = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}}} \qquad \underline{\underline{E = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}}}$$

Die Spannung zwischen zwei Punkten mit den Abständen r_1 und r_2 vom (Halb-) Kugelmittelpunkt errechnet sich wie folgt:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \cdot \int_{r_{11}}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_1}^{r_2} = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1}$$

Für $\Delta r = r_2 - r_1 << r_1, r_2$: $U_{12} \approx \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{\Delta r}{r^2}$

Im Bereich des Personenschutzes wird häufig die “Schrittspannung“ für Δr = 1 m angegeben (typische Schrittlänge eines Menschen).

Zahlenbeispiel: Erdreich: $\rho \approx 100\ \Omega m$, $I = 100$ kA, $r = 10$ m, $\Delta r = 1$ m

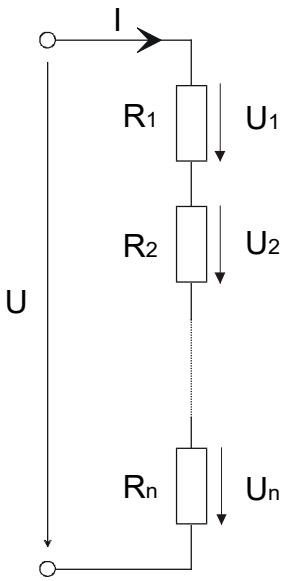
$$U_{12} \approx \frac{100\Omega m \cdot 100 \cdot 10^3\, A}{2\pi} \cdot \frac{1m}{100m^2} = 15{,}9kV$$

4.3.5 Reihenschaltung von Widerständen

Methode *I-J-E-U-R*

$\oint_{A_\nu} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ Durch jede Querschnittsfläche fließt der gleiche Strom.

Ersatzschaltung



$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$
$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \ldots + R_n \cdot I$$
$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

$$\boxed{R = \sum_{\nu=1}^{n} R_\nu}$$

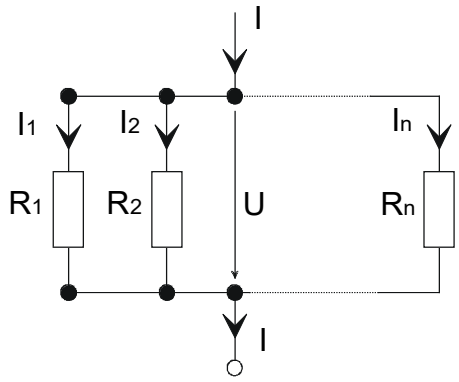
Bei der Reihenschaltung addieren sich die Widerstände

4.3.6 Parallelschaltung von Widerständen

Methode *U-E-J-I-R*

$\oint_{s_\nu} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ Die Potenzialdifferenz zwischen den beiden Knotenpunkten ist gleich.

Ersatzschaltung



Qualitativ:
Parallel zu dem kleinsten der *n* Widerstände stehen dem Strom noch weitere Wege zur Verfügung.

Der Gesamtwiderstand ist kleiner als der kleinste Teilwiderstand.

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + ... + \frac{U}{R_n}$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{R_\nu}} \qquad \boxed{G = \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu}$$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte

4.3.7 Schlussbetrachtung

Zur Berechnung von beliebigen Widerständen bietet sich folgende Lösungsstrategie an:

1. Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

2. Beachtung der Grenzbedingungen
   - ideal leitende Elektroden ($\vec{E}$ und $\vec{J}$ stehen senkrecht auf Metall)
   - unterschiedliche Materialien (E_t stetig und J_n stetig)

3. Feldlinienbild mit Äquipotenzialflächen einzeichnen

4. Symmetrieüberlegungen

   a) Muss die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ auf einer Äquipotenzialfläche überall gleich groß sein

      ⇨ Methode ***I-J-E-U-R***, dies entspricht der **Reihenschaltung** infinitesimaler Widerstände

$$R = \int dR = \frac{1}{I}\int dU = \int \frac{ds}{\kappa \cdot A}$$

b) Muss die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ entlang einer Feldlinie überall gleich groß sein

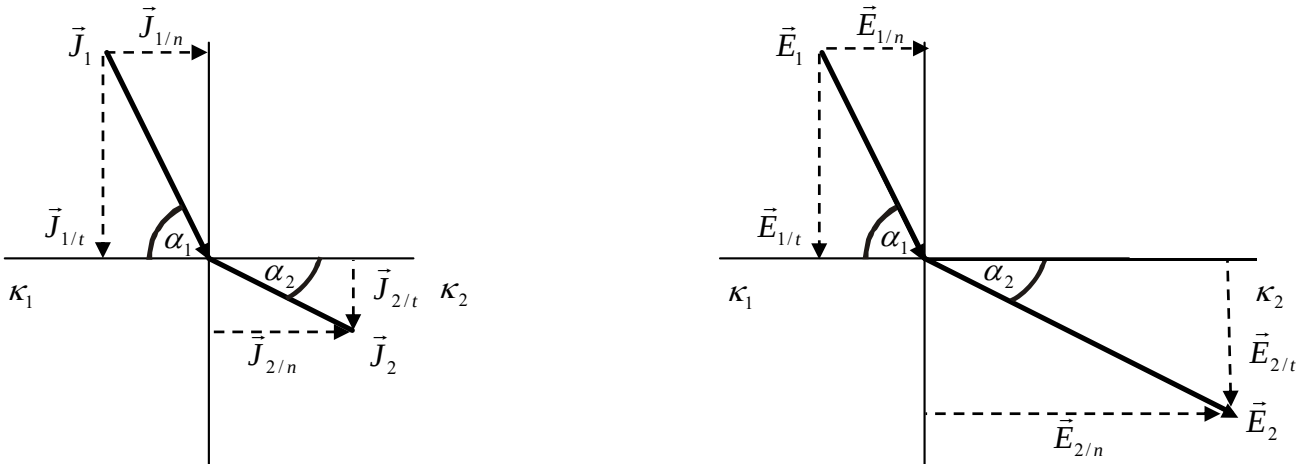
⇨ Methode ***U-E-J-I-R***, dies entspricht der **Parallelschaltung** infinitesimaler Widerstände

$$\frac{1}{R} = \int d\frac{1}{R} = \frac{1}{U}\int dI = \int \frac{\kappa \cdot dA}{d}$$

4.4 Bedingungen an Grenzflächen

Hier gelten, wie auch im elektrostatischen Feld (3.8), ähnliche Bedingungen wie in der Optik. Wir betrachten im Folgenden die Grenzfläche zwischen zwei Materialien, die hier unterschiedliche Leitfähigkeiten aufweisen. Wir gehen weiter davon aus, dass die Feldlinien, wie im Bild gezeigt, nicht senkrecht auf diese Grenzfläche auftreffen.

Auf Grund der unterschiedlichen Leitfähigkeiten werden Betrag und Richtung der Feldstärke in beiden Materialien nicht gleich sein. Die Bedingung der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes (verallgemeinerte Maschenregel) und die verallgemeinerte Knotenregel müssen jedoch auch an der Grenzfläche erfüllt sein.



$\kappa_1 \neq \kappa_2 \qquad hier : \kappa_1 > \kappa_2$

Wir nehmen nun wieder ein infinitesimal kleines Volumenelement (Scheibe) direkt an der Grenzschicht zwischen den beiden Materialien heraus (siehe auch 3.8):

Materialgleichung:

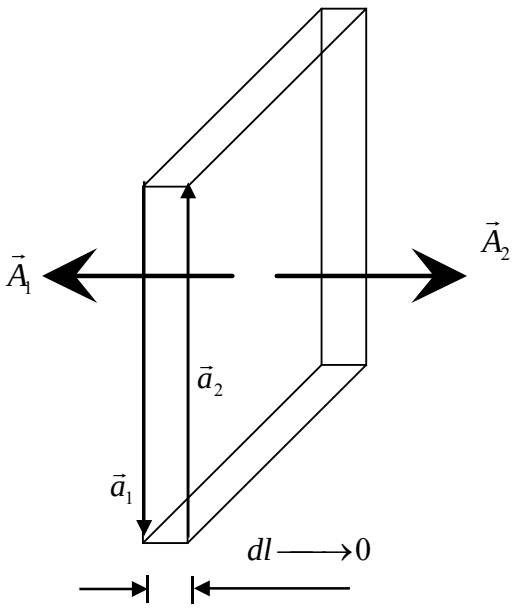
$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Wirbelfreiheit:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Knotenregel:

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$



$$\left|\vec{a}_1\right| = \left|\vec{a}_2\right| = a$$

$$\left|\vec{A}_1\right| = \left|\vec{A}_2\right| = A$$

A, a: jeweils infinitesimal klein

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E}_1 \cdot \vec{a}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{a}_2 = E_{1/t} \cdot a - E_{2/t} \cdot a = 0$$

$$\boxed{E_{1/t} = E_{2/t}}$$

Die Tangential-Komponente der elektrischen Feldstärke ist stetig

$$\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{J}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{J}_2 \cdot \vec{A}_2 = -J_{1/n} \cdot A + J_{2/n} \cdot A = 0$$

$$\boxed{J_{1/n} = J_{2/n}}$$

Die Normal-Komponente der Stromdichte ist stetig

Aus der Kombination beider Beziehungen folgt:

$$J_{1/n} = J_{2/n} \quad \rightarrow \quad \kappa_1 \cdot E_{1/n} = \kappa_2 \cdot E_{2/n}$$

$$E_{1/t} = E_{2/t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\kappa_1} \cdot \frac{E_{1/t}}{E_{1/n}} = \frac{1}{\kappa_2} \cdot \frac{E_{2/t}}{E_{2/n}}$$

$$\frac{1}{\kappa_1} \cdot \tan\alpha_1 = \frac{1}{\kappa_2} \cdot \tan\alpha_2$$

$$\boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$$

Besprechen wir hier noch einen speziellen Fall: Wie verhalten sich die elektrischen Feldlinien und die Stromlinien am Austritt aus einem idealen Leiter mit $\kappa_1 \rightarrow \infty$? In der oben dargestellten Beziehung ergibt sich damit:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \rightarrow \infty$$

Dafür gibt es nun zwei Möglichkeiten:

$\tan\alpha_1 \rightarrow \infty \quad \alpha_1 = 90°$

Die Stromlinien laufen parallel zur Grenzfläche. Sie treten nicht in das umgebende, weniger gut leitfähige Material mit κ_2 ein.

$\tan\alpha_2 = 0 \quad \alpha_2 = 0°$

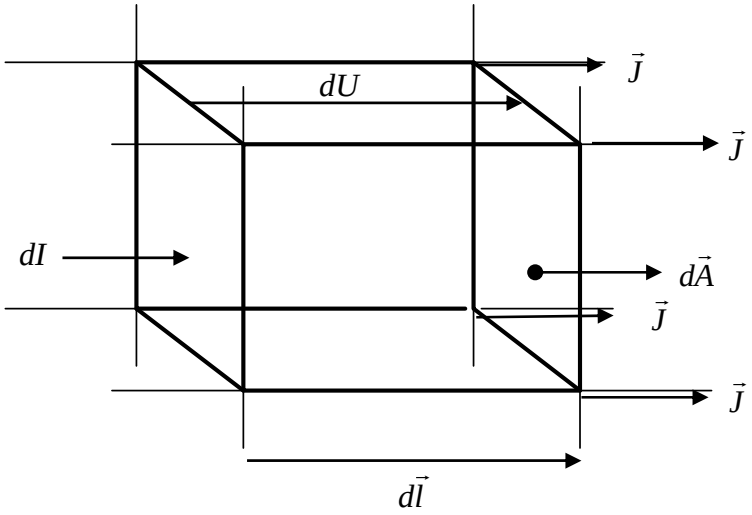
Die Stromlinien verlassen den Leiter im rechten Winkel zur Grenzfläche. Dies geschieht dann am Leiterende, wenn dort das zweite Material mit der geringeren Leitfähigkeit κ_2 angeschlossen ist. Gleiches gilt dann auch für die elektrischen Feldlinien, die den Leiter dort ebenfalls rechtwinklig zur Grenzfläche verlassen.

Weiterhin ergibt sich aus $J_{1t} = \kappa_1 \cdot E_{1t}$ und bei endlicher Stromdichte, dass im Inneren des idealen Leiters die Tangentialfeldstärke gleich Null sein muss. Das Potenzial ist also überall im idealen elektrischen Leiter gleich.

4.5 Leistungsdichte und Joule‘sche Verlustleistung

Die Leistungsdichte gibt die Energie pro Volumen und Zeit an, die durch den Stromtransport (bewegte Ladungsträger) an das Kristallgitter abgegeben wird, d. h. die Umwandlung der über das elektrische Feld aufgenommenen kinetischen Energie der Ladungsträger in Wärme (Gitterschwingungen des Kristalls). Da diese Energie dem elektrischen Feld entnommen wird, spricht man hier von Joule‘schen Verlusten.

Leistungsdichte



Dies ist die Leistung, die in einem infinitesimal kleinen Volumen umgesetzt wird. Wir betrachten dazu wieder den Quader aus 4.2.3.

$$dP = dU \cdot dI = E \cdot dl \cdot J \cdot dA = E \cdot J \cdot dl \cdot dA = E \cdot J \cdot dV$$

$$\frac{dP}{dV} = E \cdot J = \rho \cdot J^2 = \kappa \cdot E^2$$ Leistungsdichte = Leistung pro Volumenelement

Einheit: $\left[\frac{dP}{dV}\right] = \frac{W}{m^3}$

Zylinderfeld (4.3.3)

Die Leistungsdichte im Zylinderfeld ergibt sich zu:

$$\frac{dP}{dV} = J \cdot E = \kappa \cdot E^2 \qquad E = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \cdot \frac{1}{r} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{\frac{dP}{dV} = \frac{\kappa \cdot U^2}{\left[\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right]^2} \cdot \frac{1}{r^2}}}$$

Hieraus lässt sich die Joule‘sche Verlustleistung *P* in einem Zylinderfeld durch Integration über das Feldvolumen berechnen:

$$P = \int \frac{dP}{dV} \cdot dV = \int_{r_i}^{r_a} \frac{dP}{dV} \cdot 2\pi \cdot l \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot l \cdot \frac{\kappa \cdot U^2}{\left[\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right]^2} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{r}{r^2} \cdot dr = 2\pi \cdot l \cdot \frac{\kappa \cdot U^2}{\left[\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\right]}$$

Kugelfeld (4.3.4)

Die Leistungsdichte im Kugelfeld ergibt sich zu:

$$\frac{dP}{dV} = \kappa \cdot E^2 \qquad E = \frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i} \cdot \frac{U}{r^2} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{\frac{dP}{dV} = \left(\frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i} \right)^2 \cdot \frac{\kappa \cdot U^2}{r^4}}}$$

Die Leistungsdichte nimmt also $1/r^4$ ab.

Hieraus lässt sich die Joule‘sche Verlustleistung P in einem Kugelfeld durch Integration über das Feldvolumen berechnen:

$$P = \int \frac{dP}{dV} \cdot dV = \int_{r_i}^{r_a} \frac{dP}{dV} \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot dr = 4\pi \cdot \left(\frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i} \right)^2 \cdot \kappa \cdot U^2 \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{r^2}{r^4} \cdot dr =$$

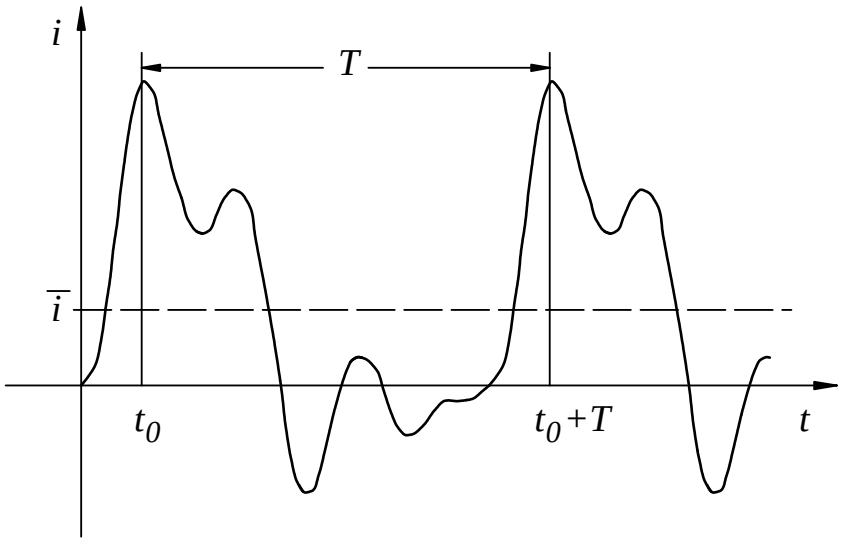
$$= 4\pi \cdot \left(\frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i} \right)^2 \cdot \kappa \cdot U^2 \cdot \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_i}^{r_a} = 4\pi \cdot \left(\frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i} \right)^2 \cdot \kappa \cdot U^2 \cdot \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right] = 4\pi \cdot \left(\frac{r_a \cdot r_i}{r_a - r_i} \right) \cdot \kappa \cdot U^2$$

5. Wechselstromkreis

5.1 Periodische Größen

5.1.1 Grundlagen

Eine Größe wird periodisch genannt, wenn ihre Zeitfunktion sich selbst periodisch in gleichen Abständen wiederholt. Das nächste Bild ist ein Beispiel einer periodischen Größe [1].



Jede dieser Wiederholungen wird eine **Periode** genannt. Die Periodizität eines Stromes oder einer Spannung lässt sich mathematisch wie folgt ausdrücken

$$i(t)=i(t+nT)$$
$$u(t)=u(t+nT)$$

mit: n irgendeine ganze Zahl
T **Periodendauer** einer Periode.

Die Anzahl an Perioden pro Zeiteinheit wird die **Frequenz** der periodischen Größe genannt:

$$f=\frac{1}{T}$$

Der spezielle Zeitverlauf der periodischen Größe wird **Wellenform** (auch Schwingungsform) genannt.

5.1.2 Definition einer Wechselgröße

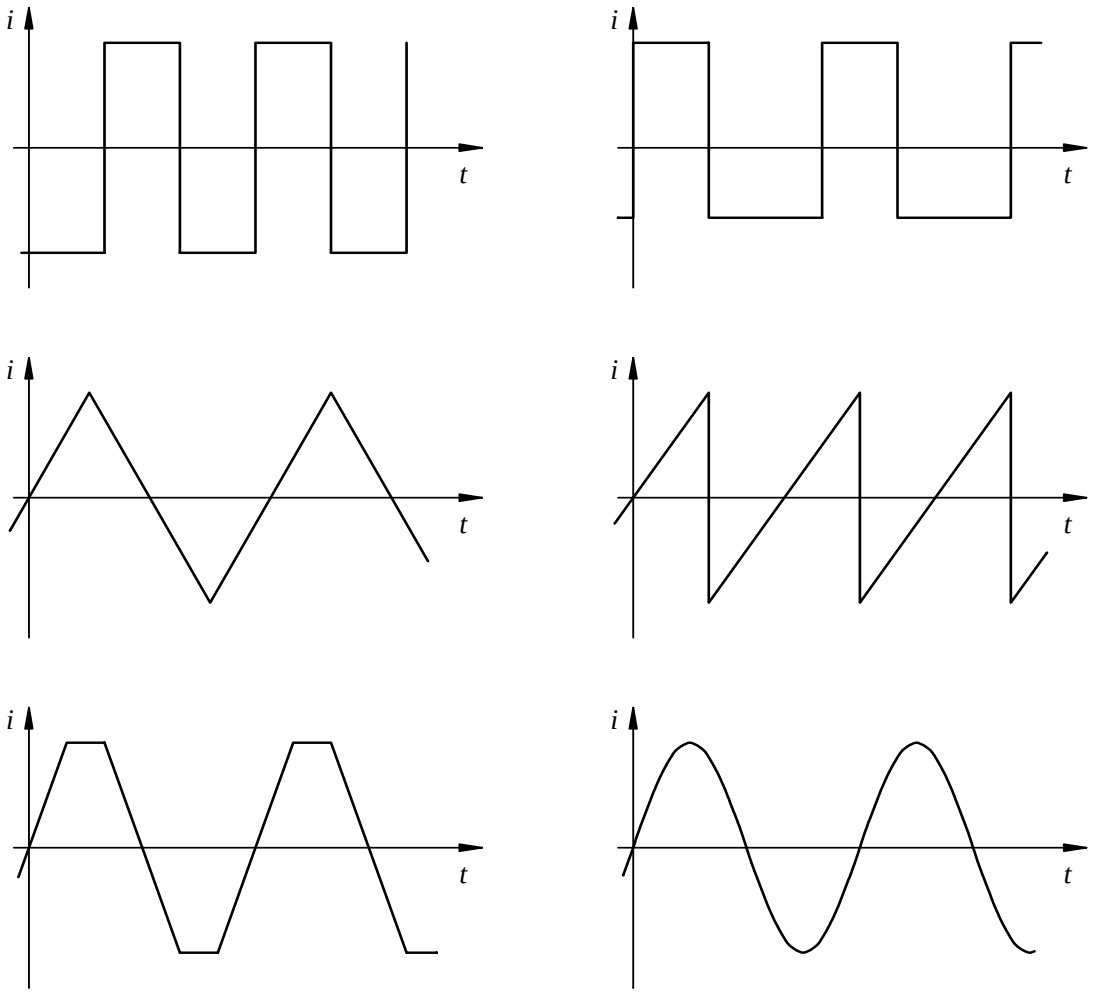
Wie bereits dargestellt, verläuft eine Wechselgröße nach einer periodischen Zeitfunktion beliebiger Form:

$$i(t) = i(t + nT)$$
$$u(t) = u(t + nT)$$

Es gibt allerdings noch eine zweite Bedingung: der arithmetische Mittelwert einer Wechselgröße ist Null:

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} i(t)dt = 0$$
$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt = 0$$

Die folgenden Bilder zeigen einige Beispiele für Wechselströme. Beachten Sie, dass die Wellenformen mit einer Ausnahme symmetrisch zur horizontalen Zeit-Achse sind.



5.1.3 Gleichrichtwert einer Wechselgröße

Der Mittelwert einer Wechselgröße ist per Definitionem Null. Daneben gibt es allerdings noch eine andere Größe, um eine Wechselgröße zu beschreiben: den Gleichrichtwert. Dabei wird das Signal erst gleichgerichtet, dann wird der Mittelwert gebildet.

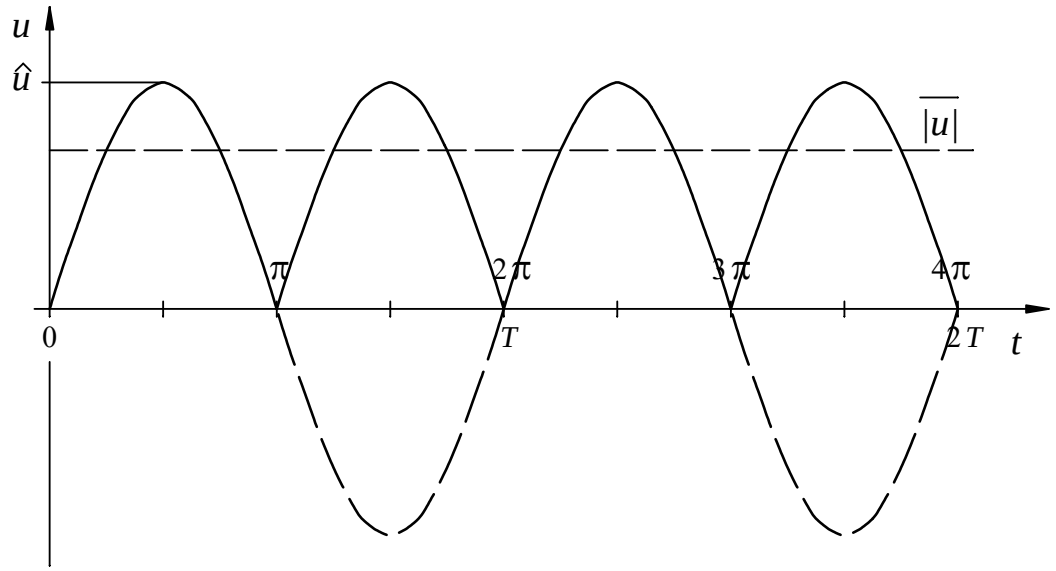
Mit einfachen Drehspulmessgeräten ist die Messung von Wechselgrößen nicht ohne weiteres möglich, da diese Geräte den arithmetischen Mittelwert, also Null anzeigen. Wechselspannungen und -ströme müssen daher vor einer Messung gleichgerichtet werden.

Anmerkung: AC oder ac ist die englische bzw. internationale Abkürzung für Wechselstrom. Dadurch wird aber auch für andere elektrische Größen dargestellt, dass es sich um Wechselgrößen handelt. Also findet man bei allen elektrischen Wechselgrößen die Abkürzung AC oder ac (Strom, Spannung, Leistung, Widerstand, etc.)

Für eine Zweiweggleichrichtung (siehe nächstes Bild) ist die Anzeige dann proportional zum Gleichrichtwert (hier am Beispiel einer gleichgerichteten Spannung):

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)| dt$$

Für eine sinusförmige Größe mit der Frequenz *f* kann die Zeitachse auch mit Hilfe des Rotationswinkels skaliert werden, wobei der Wert 2π einer Periode entspricht (einer vollen Umdrehung).



Der Wert 2π entspricht so der Periodendauer *T*. Durch Einführung einer Kreisfrequenz:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

können wir den Verlauf der sinusförmigen Spannung als Funktion der Zeit angeben:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

Der Gleichrichtwert kann dann wie folgt berechnet werden:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\hat{u} \cdot \sin(\omega t)| dt$$

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \left\{ \int_{0}^{\frac{1}{2}T} \hat{u} \cdot \sin(\omega t) dt + \int_{\frac{1}{2}T}^{T} \hat{u} \cdot [-\sin(\omega t)] dt \right\}$$

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{u}}{T} \left\{ -\frac{1}{\omega} \cdot \cos(\omega t) \Big|_{t=0}^{T/2} + \frac{1}{\omega} \cdot \cos(\omega t) \Big|_{t=T/2}^{T} \right\}$$

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{u}}{\omega T} \left\{ -\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - (-1) + \cos(\omega T) - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right\}$$

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{u}}{\frac{2\pi}{T} T} \{ -\cos(\pi) + 1 + \cos(2\pi) - \cos(\pi) \}$$

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{u}}{2\pi} \{1 + 1 + 1 + 1\}$$

$$\overline{|u|} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{u} = 0{,}637 \cdot \hat{u}$$

Genau genommen ist der gleichgerichtete Sinus periodisch mit einer Periodendauer von *T*/2. Darüber hinaus ist jede dieser Perioden symmetrisch zu dem Spitzenwert. Dadurch kann sich die Integration auf den Bereich 0 bis *T*/4 beschränken:

$$\overline{|u|} = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/4} \hat{u} \cdot \sin(\omega t) dt$$

$$\overline{|u|} = \frac{4 \cdot \hat{u}}{T} \left\{ -\frac{1}{\omega} \cdot \cos(\omega t) \Big|_{t=0}^{T/4} \right\}$$

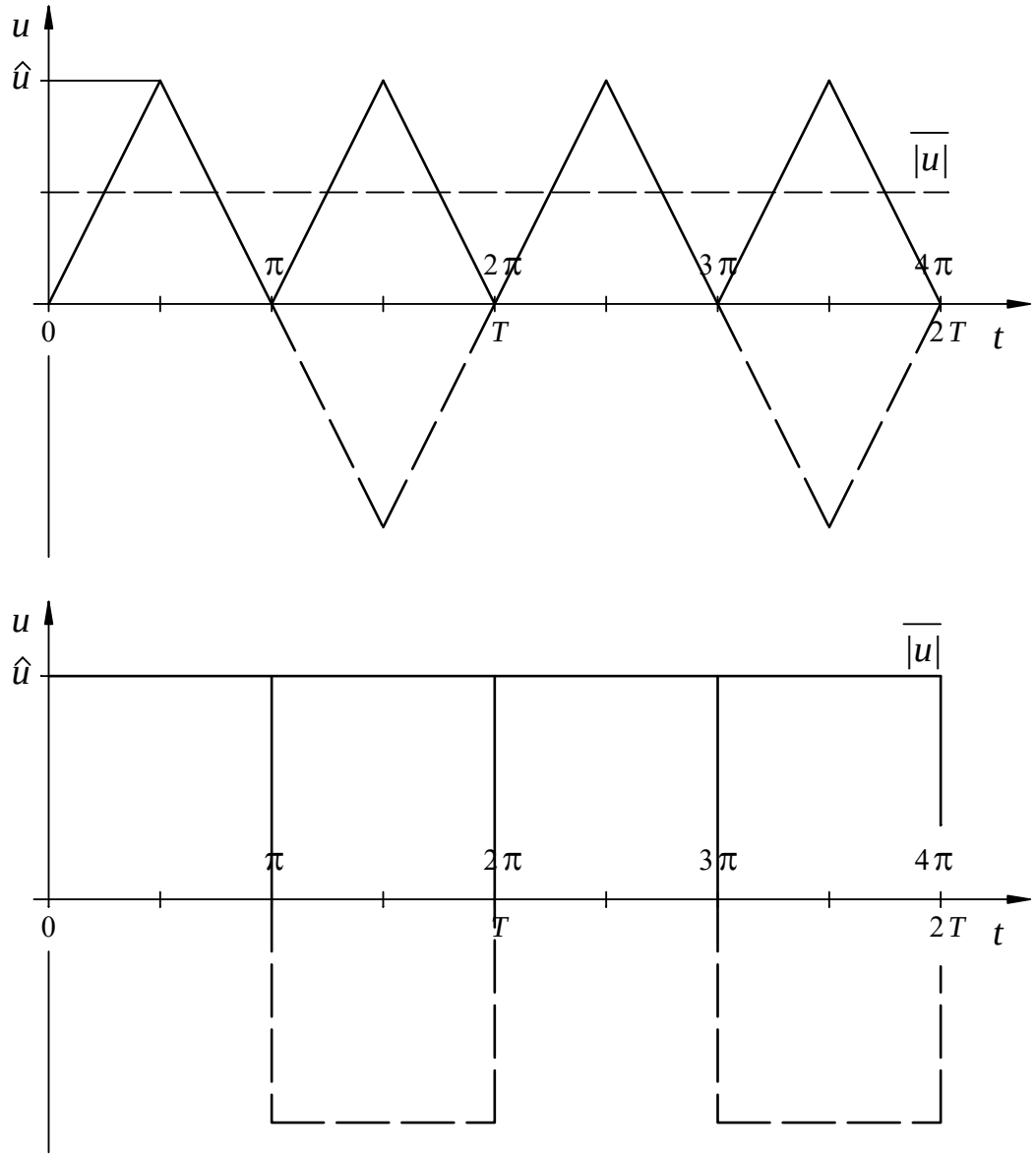
$$\overline{|u|} = \frac{4 \cdot \hat{u}}{\omega T} \left\{ -\cos\left(\frac{\omega T}{4}\right) - (-1) \right\}$$

$$\overline{|u|} = \frac{4 \cdot \hat{u}}{2\pi} \{0 + 1\} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{u}$$

Die folgenden Bilder zeigen zwei weitere Beispiele für den Gleichrichtwert:

- Dreieckfunktion: $\overline{|u|} = \frac{1}{2} \cdot \hat{u}$

- Rechteckfunktion: $\overline{|u|} = \hat{u}$



5.1.4 Effektivwert einer Wechselgröße

Der Effektivwert einer Wechselspannung oder eines Wechselstroms ist so definiert, dass er proportional zu der an einem Widerstand umgesetzten Leistung ist. Eine Wechselspannung oder ein Wechselstrom mit dem gegebenen Effektivwert soll vom physikalischen Standpunkt genauso wirksam sein wie eine Gleichspannung oder ein Gleichstrom mit demselben (konstanten) Wert.

Effektivwert eines Stroms (gleichartige Festlegung auch für eine Spannung):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,dt}$$

Ein Wechselstrom mit dem Effektivwert *I* bewirkt in einem Ohm‘schen Widerstand im zeitlichen Mittel denselben Leistungsumsatz wie ein gleich großer Gleichstrom.

$$\overline{p} = P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} R\cdot i^2(t)dt = \frac{R}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)dt = R\cdot I^2$$

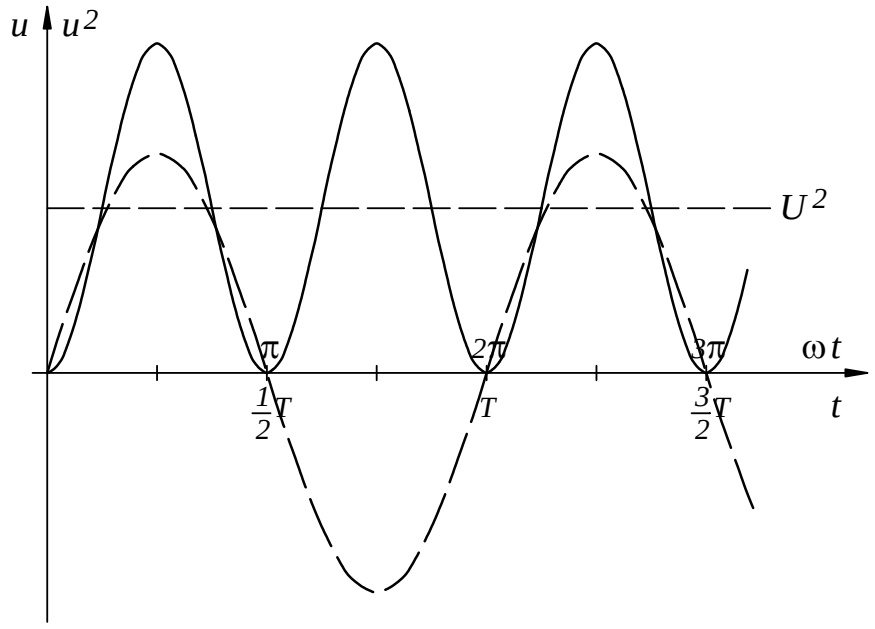
Mit Hilfe des Effektivwerts kann man z.B. den Heizeffekt eines Wechselstroms mit dem eines Gleichstroms vergleichen.

Dreheiseninstrumente und elektrodynamische Instrumente haben eine Anzeige, die proportional zu i^2 ist. Sie können so kalibriert werden, dass sie den Effektivwert direkt anzeigen.

Moderne, so genannte True-RMS-Messgeräte wandeln die Eingangsgröße in digitale Werte und berechnen den tatsächlichen Effektivwert (engl.: RMS = Root Mean Square) numerisch.

Sinusförmige Kurvenform

Nachstehend sehen wir eine sinusförmige Spannung (gestrichelte Linie) und das Quadrat der Spannung (durchgezogene Linie). Wir können daraus annehmen, dass der Mittelwert U^2 der quadrierten Spannung offensichtlich die Hälfte des Scheitelwerts $\hat{u}^2$ beträgt. Dies soll nun noch durch Rechnung geprüft werden.



Um den Effektivwert einer sinusförmigen Spannung zu berechnen, müssen wir über das Quadrat der Spannung integrieren. Wie man in dem obenstehenden Bild erkennt, hat das Quadrat der Spannung die doppelte Frequenz wie die Spannung selbst. Aus Symmetriegründen ist es daher ausreichend, nur von $t = 0$ bis $t = T/4$ zu integrieren.

$$U^2 = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \hat{u}^2 \sin^2(\omega t) dt$$

Benutzt man die Beziehung $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, so erhält man:

$$U^2 = \frac{4 \cdot \hat{u}^2}{2 \cdot T} \int_0^{T/4} [1 - \cos(2\omega t)] dt$$

$$U^2 = \frac{2 \cdot \hat{u}^2}{T} \left[t - \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \sin(2\omega t) \right]_{t=0}^{T/4}$$

$$U^2 = \frac{2 \cdot \hat{u}^2}{T} \left[\frac{T}{4} - \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2} \right) \right]$$

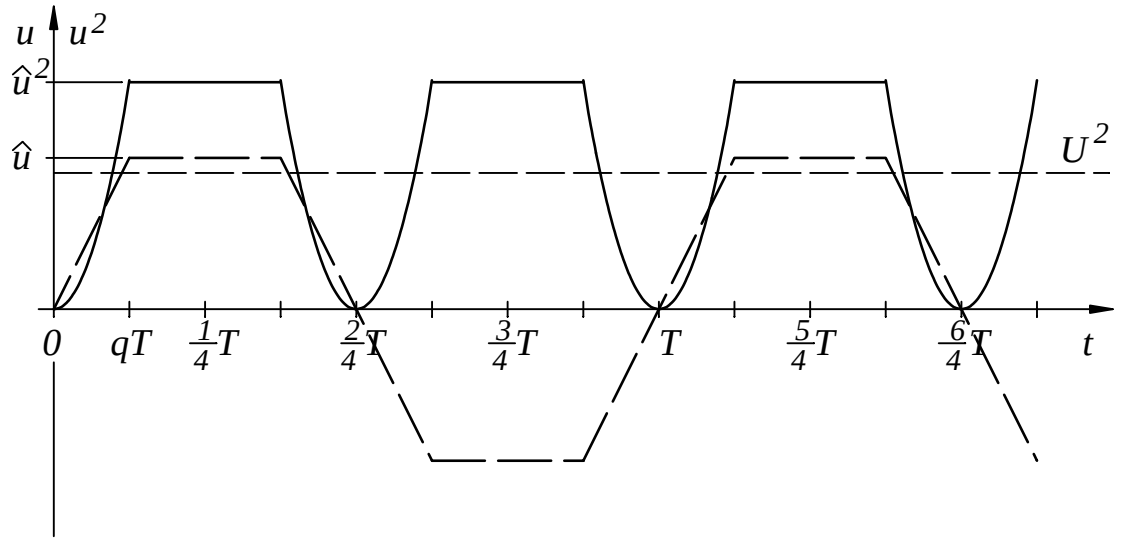
$$U^2 = \frac{2 \cdot \hat{u}^2}{T} \left[\frac{T}{4} - \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot \sin(\pi) \right] = \frac{\hat{u}^2}{2}$$

Damit erhalten wir schließlich den Effektivwert einer sinusförmigen Spannung:

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot \hat{u}$$

Trapezförmige Kurvenform

Als zweites Beispiel untersuchen wir eine trapezförmige Spannung (gestrichelte Linie) und ihr Quadrat (durchgezogene Linie).



Zwischen $t = 0$ und $t = qT$ ist der Spannungsverlauf eine Gerade mit einer Steigung $m = \frac{\hat{u}}{qT}$. Aus Symmetriegründen ist es wieder ausreichend, nur von $t = 0$ bis $t = T/4$ zu integrieren.

$$U^2 = \frac{1}{T/4}\left\{\int_0^{qT}\left(\frac{\hat{u}}{qT}\cdot t\right)^2 dt + \int_{qT}^{T/4}\hat{u}^2 dt\right\}$$

$$U^2 = \frac{4}{T}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{\hat{u}^2}{q^2\cdot T^2}\cdot t^3\Big|_{t=0}^{qT} + \hat{u}^2\cdot t\Big|_{t=qT}^{T/4}\right\}$$

$$U^2 = \frac{4\cdot\hat{u}^2}{T}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{q^3\cdot T^3}{q^2\cdot T^2} + \frac{1}{4}\cdot T - q\cdot T\right\}$$

$$U^2 = 4\cdot\hat{u}^2\left\{\frac{1}{3}\cdot q + \frac{1}{4} - q\right\}$$

$$U^2 = \hat{u}^2\left(1 - \frac{8}{3}\cdot q\right)$$

Daraus erhalten wir den Effektivwert:

$$U = \hat{u}\cdot\sqrt{1 - \frac{8}{3}\cdot q}$$

Mit dem trapezförmigen Verlauf können wir nun auch noch zwei weitere interessante Fälle lösen:

- Für $q = 0$ ist das Trapez ein Rechteck, und der Effektivwert ist $U = \hat{u}$
- Für $q = 1/4$ wird aus dem Trapez ein Dreieck, und der Effektivwert ist $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$

5.1.5 Formfaktor and Scheitelfaktor

Ein Drehspulinstrument und auch ein einfaches Digitalmultimeter ermitteln in einem Wechselspannungs-Messbereich den Gleichrichtwert der Eingangsgröße (Spannung oder Strom). Die Anzeige wird dann so kalibriert, dass für eine sinusförmige Größe der Effektivwert angezeigt wird. Dazu wird der Gleichrichtwert mit dem so genannten Formfaktor multipliziert.

Der Formfaktor *F* ist also als das Verhältnis von Effektivwert *U* zu Gleichrichtwert $\overline{|u|}$ definiert. Er hängt von der Form der Wechselgröße ab, so dass die oben genannten Messinstrumente nur für sinusförmige Größen korrekte Effektivwerte anzeigen.

Das Verhältnis von größtem Augenblickswert $\hat{u}$ zu Effektivwert *U* wird als Scheitelfaktor oder Crest-Faktor ξ bezeichnet.

Kurvenform	Formfaktor $F = \frac{U}{\overline{\lvert u \rvert}}$	Scheitelfaktor $\xi = \frac{\hat{u}}{U}$
Dreieck	$F = \frac{\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\cdot\hat{u}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155$	$\xi = \frac{\hat{u}}{\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} = 1{,}732$
Sinus	$F = \frac{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}\cdot\hat{u}} = \frac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}} = 1{,}111$	$\xi = \frac{\hat{u}}{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = 1{,}414$
Rechteck	$F = \frac{\hat{u}}{\hat{u}} = 1{,}000$	$\xi = \frac{\hat{u}}{\hat{u}} = 1{,}000$

5.1.6 Mischgrößen

Häufig treten Wechselgrößen gemischt mit einem Gleichanteil auf (Mischgrößen):

Mischgröße	=	Wechselgröße	+	Gleichanteil
$i(t)$	=	$i_{\sim}(t)$	+	$i_{=}(t)$

Die Mischgröße ist periodisch: $i(t) = i(t + nT)$

und ihr arithmetischer Mittelwert ist: $i_{=} = \bar{i} = \frac{1}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T} i(t)\,dt \neq 0$.

Der Effektivwert einer Mischgröße kann wie folgt berechnet werden:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left(i_{=} + i_{\sim}\right)^2 dt}$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i_{=}^2 dt + \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left(i_{=}\cdot i_{\sim}\right)dt + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i_{\sim}^2 dt$$

$$I^2 = I_{=}^2 + 0 + I_{\sim}^2$$

Der Effektivwert ist dann: $I = \sqrt{I_{=}^2 + I_{\sim}^2}$

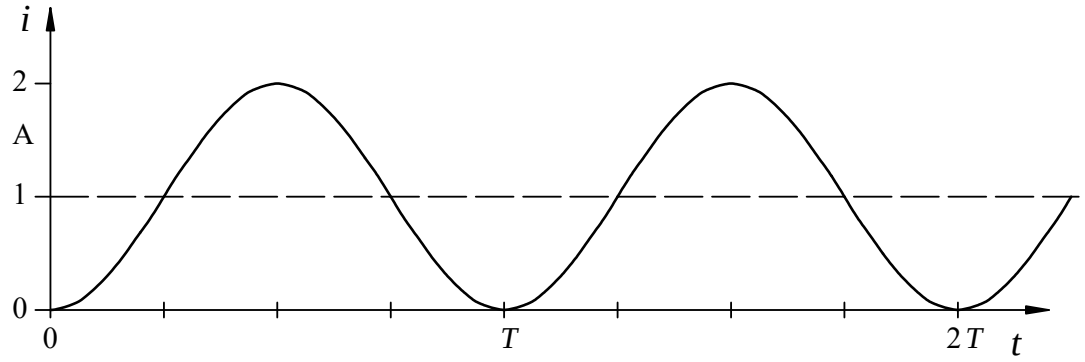
Eine entsprechende Beziehung kann auch benutzt werden, um den Effektivwert einer Mischung von Wechselgrößen mit unterschiedlichen Frequenzen zu berechnen.

Das folgende Beispiel zeigt die Zusammenhänge. Wir betrachten folgenden Strom, der grundsätzlich einen sinusförmigen Verlauf hat und analytisch beschrieben werden kann:

$$i(t) = 1A\cdot\left[1-\cos\left(\omega t\right)\right]$$

mit: $i_{=} = 1A$ $\qquad I_{=} = 1A$

$i_{\sim} = -1A\cdot\cos\left(\omega t\right)$ $\qquad I_{\sim} = \frac{1}{\sqrt{2}}A$



Der Effektivwert ist: $I = \sqrt{(1A)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}A\right)^2} = \sqrt{1{,}5}A = 1{,}225\,A$

Das ist <u>nicht das Gleiche</u> wie die Summe der Effektivwerte der beiden Komponenten:

$$I \neq 1A + \frac{1}{\sqrt{2}}A = 1{,}707A$$

5.1.7 <u>Fourier-Zerlegung</u>

Alle periodischen Zeitfunktionen *f(t)* lassen sich als Überlagerung von Sinus-und Kosinus-Schwingungen unterschiedlicher Frequenz und Phasenlage und ggf. eines Gleichanteils darstellen. Die Überlagerung enthält im Allgemeinen eine sinusförmige

Schwingung mit der Grundfrequenz $1/T$ entsprechend der Periodendauer T der Funktion f(t). Man nennt diese Grundschwingung, 1. Teilschwingung oder 1. Harmonische. Die Frequenzen der übrigen sinusförmigen Schwingungen (Oberschwingungen, höhere Harmonische) sind immer ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. Das Aufsummieren des Gleichanteils, der Grundschwingung und der Oberschwingungen geschieht in Form einer Fourier-Reihe.

Ziel: Eine periodische Zeitfunktion *f(t)* mit der Kreisfrequenz ω soll in optimaler Weise angenähert werden durch eine Näherungsfunktion *g(t):*

$$g(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + a_3 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \ldots$$
$$+ b_1 \cdot \sin(\omega t) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + b_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + \ldots$$

Im nächsten Schritt sind nun die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ so zu bestimmen, dass die Näherung optimal wird. Hierzu benötigt man ein Kriterium, aufgrund dessen sich entscheiden lässt, wann die Näherung optimal ist.

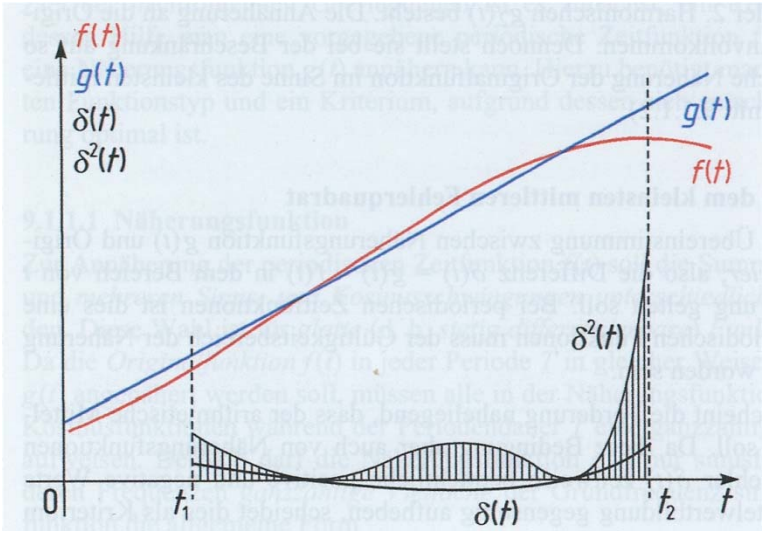
Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Beispiel:
Eine Funktion *f(t)* soll im Bereich $t_1 < t < t_2$ optimal durch eine Gerade mit der Geradengleichung $g(t) = a_0 + a_1 \cdot t$ angenähert werden.

Fehler = Differenz zwischen Näherungsfunktion g(t) und Originalfunktion f(t):

$$\delta(t) = g(t) - f(t)$$

Dafür scheint zunächst die Forderung naheliegend, dass der arithmetische Mittelwert des Fehlers $\overline{\delta} = 0$ sein soll. Dies genügt aber nicht, da auch offensichtlich unsinnige Geraden mit abschnittsweise beträchtlichen positiven und negativen Abweichungen, die sich bei der Mittelwertbildung ausgleichen, diese Bedingung erfüllen können [1].



Daher: Das mittlere Fehlerquadrat soll minimal werden:

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - f(t)]^2 \, dt$$

Damit muss also das Integral minimal werden, das anschaulich durch die im obigen Bild schraffierte Fläche dargestellt ist:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left[g(t) - f(t) \right]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[a_0 + a_1 \cdot t - f(t) \right]^2 dt$$

Daraus können nun die Koeffizienten a_0 und a_1 bestimmt werden. Man erhält diese, wenn man J jeweils nach a_0 und a_1 differenziert und die 1. Ableitung jeweils null setzt:

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[a_0 + a_1 \cdot t - f(t) \right]^2 dt = 2 \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left[a_0 + a_1 \cdot t - f(t) \right] dt = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[a_0 + a_1 \cdot t - f(t) \right]^2 dt = 2 \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left[a_0 + a_1 \cdot t - f(t) \right] \cdot t dt = 0$$

Hieraus folgt, wenn man die erhaltenen Integrale jeweils in zwei Teilintegrale zerlegt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[a_0 + a_1 \cdot t \right] dt = a_0 \cdot \left(t_2 - t_1 \right) + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \left({t_2}^2 - {t_1}^2 \right) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[a_0 \cdot t + a_1 \cdot t^2 \right] dt = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot \left({t_2}^2 - {t_1}^2 \right) + \frac{1}{3} \cdot a_1 \cdot \left({t_2}^3 - {t_1}^3 \right) = \int_{t_1}^{t_2} t \cdot f(t) dt$$

Die auf der rechten Seite stehenden Integrale müssen mit graphischen oder numerischen Methoden aus der vorgegebenen Funktion *f(t)* gelöst werden. Die auf der linken Seite stehenden Integrale sind allgemein gelöst und ergeben je eine Linearkombination der Koeffizienten a_0 und a_1, so dass sich damit ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_0 und a_1 ergibt.

Das gleiche Verfahren kann auch bei einer Näherung durch eine Parabelgleichung $g(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$ angewendet werden ...

<u>Bestimmung der Fourier-Koeffizienten für eine periodische Zeitfunktion</u>

Originalfunktion: *f(t)* = periodische Zeitfunktion der Kreisfrequenz ω

Näherungsfunktion:

$$g(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + a_3 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \ldots$$
$$+ b_1 \cdot \sin(\omega t) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + b_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + \ldots$$

Nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate muss wieder das Integral J minimal werden:

$$J = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[g(t) - f(t) \right]^2 dt$$

a_0: $$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 2 \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \left[g(t) - f(t) \right] dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)dt = a_0 \cdot T = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \qquad \rightarrow \qquad \boxed{a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt}$$

Das auf der linken Seite stehende Integral hat den Wert $a_0 T$, da die Integrale sämtlicher in $g(t)$ enthaltener Sinus- und Kosinus-Funktionen über eine Periodendauer T null ergeben. Der Koeffizient a_0 stellt also den Gleichanteil dar.

a_n: $$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 2 \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \left[g(t) - f(t) \right] \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt$$

Wenn man die Näherungsfunktion $g(t)$ in das Integral auf der linken Seite einsetzt, stellt sich dieses in Form einer Summe dar:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_0 \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt + \sum_{x=1}^{m} \int_{t_0}^{t_0+T} a_x \cdot \cos(x \cdot \omega t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt + \sum_{x=1}^{m} \int_{t_0}^{t_0+T} b_x \cdot \sin(x \cdot \omega t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt$$

Wendet man die aus der Trigonometrie bekannten Identitäten an, so lässt sich zeigen, dass fast alle in der Summe enthaltenen Integrale über eine Periodendauer T null sind. Definitionsgemäß ergibt ja die Integration einer Wechselgröße über eine oder mehrere Perioden immer den Wert null.

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha) \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] \\ \cos(\alpha) \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right] \\ \sin(\alpha) \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right] \end{aligned}}$$

Nur das Integral:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_x \cdot \cos(x \cdot \omega t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt$$ mit $x = n$ ergibt wegen $\cos(x - n) = \cos(0) = 1$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \cos(2 \cdot n \cdot \omega t)\right] dt = \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot T$$

Damit: $$\frac{1}{2} \cdot a_n \cdot T = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt \qquad \rightarrow \qquad \boxed{a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt}$$

***b**n*:
$$\frac{\partial J}{\partial b_n} = 2 \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \left[g(t) - f(t) \right] \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt$$

Wenn man auch hier die Näherungsfunktion g(t) im Integral auf der linken Seite einsetzt, stellt sich dieses in Form einer Summe dar:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a_0 \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt + \sum_{x=1}^{m} \int_{t_0}^{t_0+T} a_x \cdot \cos(x \cdot \omega t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt + \sum_{x=1}^{m} \int_{t_0}^{t_0+T} b_x \cdot \sin(x \cdot \omega t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt$$

Hier sind wiederum alle Glieder null, bis auf:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} b_x \cdot \sin(x \cdot \omega t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} b_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot n \cdot \omega t) \right] dt = \frac{1}{2} \cdot b_n \cdot T \quad \text{für } x = n$$

Damit: $\frac{1}{2} \cdot b_n \cdot T = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt \quad \rightarrow \quad \boxed{b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt}$

Im Allgemeinen ist die Übereinstimmung der Näherungsfunktion *g(t)* mit der Originalfunktion *f(t)* umso besser, je mehr Summenglieder berücksichtigt werden. Lässt man $n \rightarrow \infty$ gehen, wird die Näherungsfunktion mit der Originalfunktion identisch.

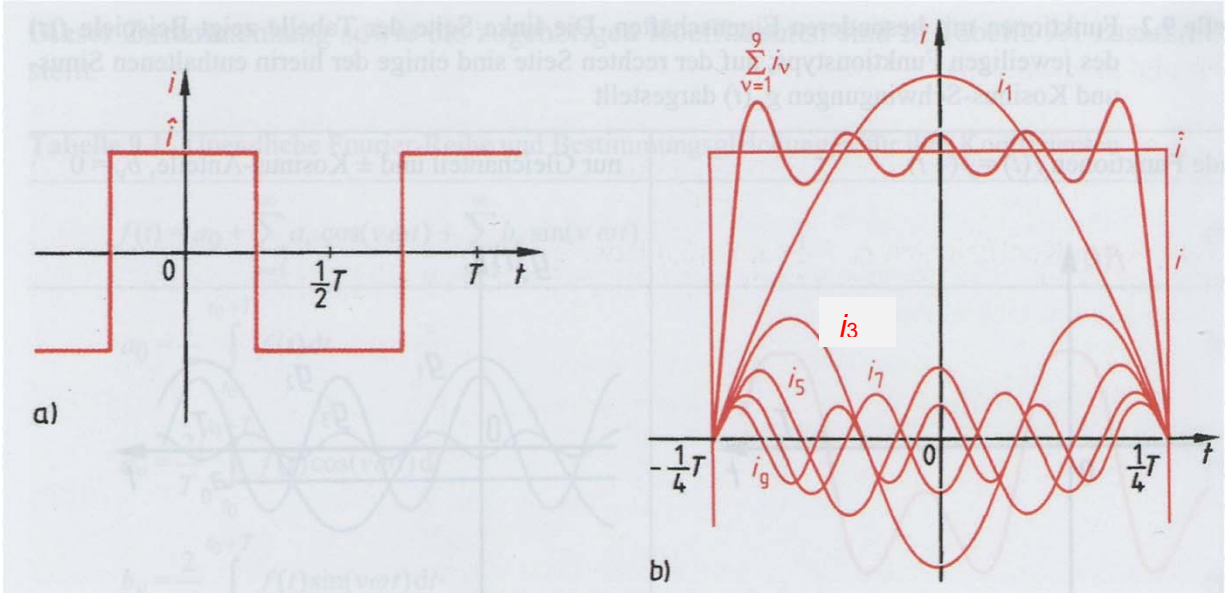
$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega t) \\ a_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt \end{aligned}}$$

Merke: Bei einer **geraden** Funktion $f(t) = f(-t)$ gilt: nur a_0 und a_n, $b_n = 0$
Bei einer **ungeraden** Funktion $f(t) = -f(-t)$ gilt: nur b_n, $a_0 = a_n = 0$

<u>Beispiel: Gerade rechteckförmige Stromfunktion</u>

Die Stromfunktion ist sowohl gerade als auch alternierend [1]. Damit ergibt sich $b_n = 0$ und $a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = 0$. Für die Koeffizienten a_n folgt:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T} i(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt = \frac{2}{T} \cdot \left\{ \int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{1}{4}T} \hat{i} \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt + \int_{\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T} -\hat{i} \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt \right\}$$



Daraus erhält man nun:

$$a_n = \frac{2 \cdot \hat{i}}{T} \cdot \left\{ \frac{1}{n \cdot \omega} \cdot \left[\sin\left(\frac{n \cdot \omega T}{4} \right) - \sin\left(-\frac{n \cdot \omega T}{4} \right) \right] - \frac{1}{n \cdot \omega} \cdot \left[\sin\left(\frac{3 \cdot n \cdot \omega T}{4} \right) - \sin\left(\frac{n \cdot \omega T}{4} \right) \right] \right\}$$

und mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$a_n = \frac{\hat{i}}{n \cdot \pi} \cdot \left\{ \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) - \sin\left(-\frac{n \cdot \pi}{2} \right) - \sin\left(\frac{3 \cdot n \cdot \pi}{2} \right) + \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\} = \frac{4 \cdot \hat{i}}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

Damit haben alle a_n mit geradzahligen n den Wert null. Für ungeradzahlige n folgt:

$$a_n = \frac{4 \cdot \hat{i}}{n \cdot \pi} = +\frac{1{,}273}{n} \cdot \hat{i} \qquad \text{für } n = 1, 5, 9 \ldots$$

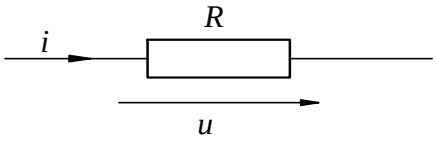
$$a_n = -\frac{4 \cdot \hat{i}}{n \cdot \pi} = -\frac{1{,}273}{n} \cdot \hat{i} \qquad \text{für } n = 3, 7, 11 \ldots$$

Für die Koeffizienten bis n = 9 gilt damit:

a_1	a_3	a_5	a_7	a_9
$+1{,}273 \cdot \hat{i}$	$-0{,}424 \cdot \hat{i}$	$+0{,}255 \cdot \hat{i}$	$-0{,}182 \cdot \hat{i}$	$+0{,}141 \cdot \hat{i}$

5.2 Wechselspannungen an einfachen Zweipolen

Wir untersuchen nun noch allgemein das Verhalten der bekannten, einfachen, passiven Zweipole bzw. Basiskomponenten eines elektrischen Netzwerks (Widerstand, Kapazität, Induktivität) an unterschiedlichen Wechselspannungen.



Widerstand R

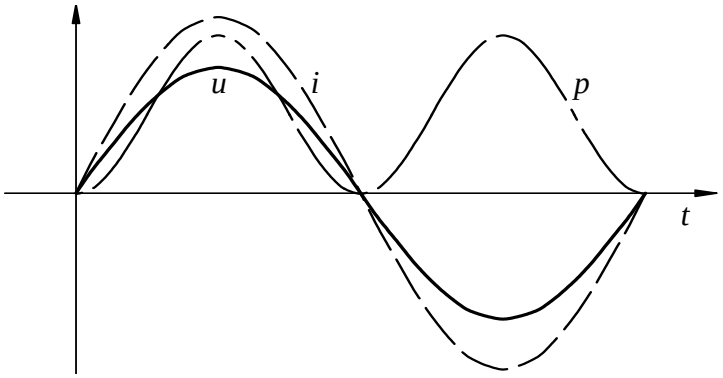
Die grundlegende Beziehung lautet (Abschnitt 2):

$$u = R \cdot i$$

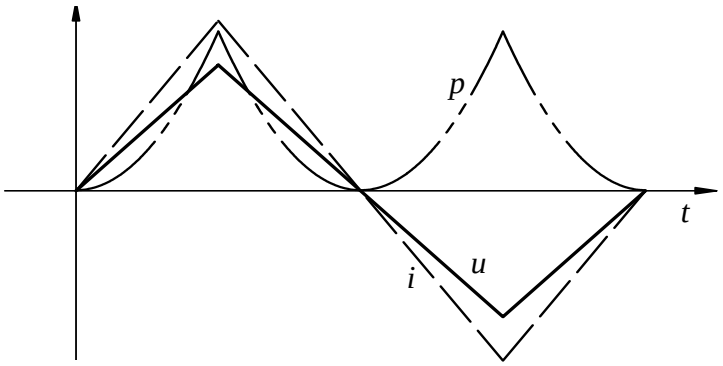
$$i = \frac{1}{R} \cdot u$$

Damit sind Spannung und Strom stets in Phase, d.h. sie haben exakt denselben Verlauf.

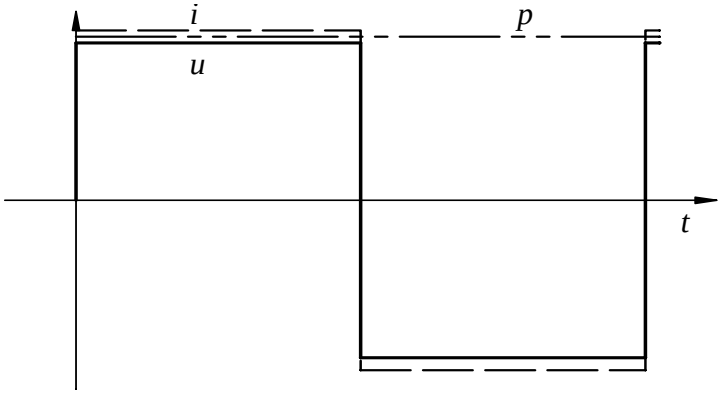
Sinusförmige Spannung

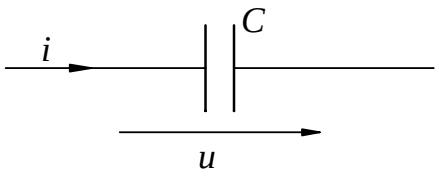


Dreieckförmige Spannung

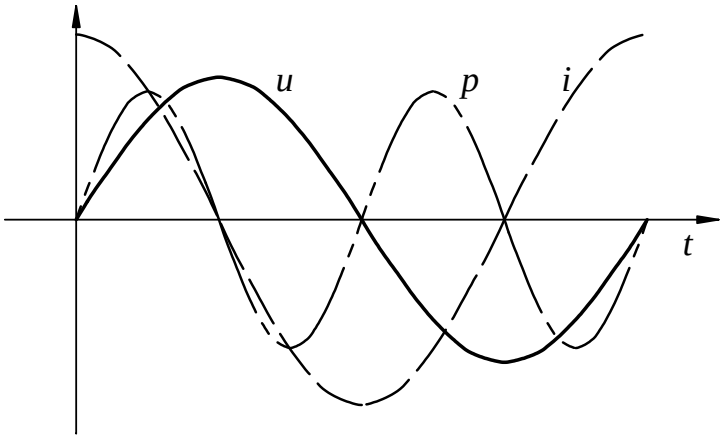


Rechteckförmige Spannung

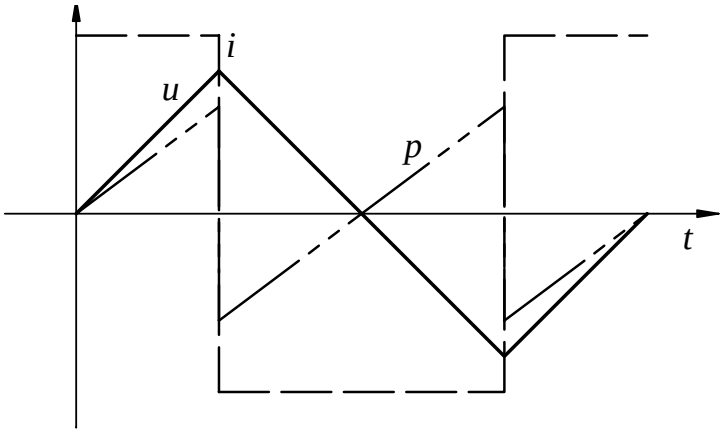




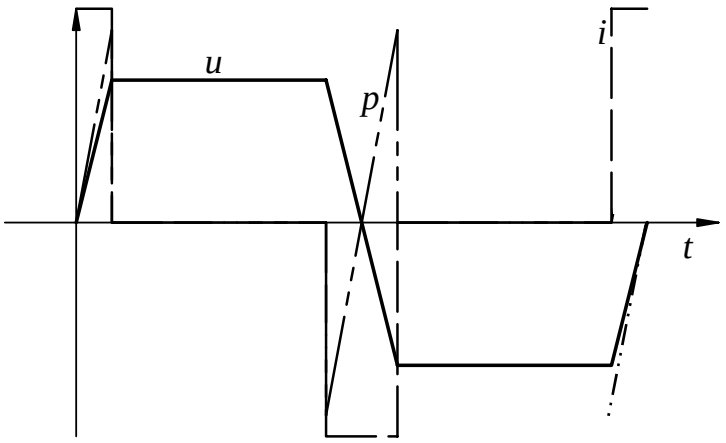
Sinusförmige Spannung



Dreieckförmige Spannung



Rechteckförmige Spannung (Trapez)



Kapazität C

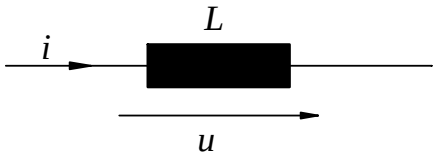
Die grundlegende Beziehung ist aus Abschnitt 3 bekannt:

$$u = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Ist die Spannung gegeben, so ist der Strom immer proportional zur zeitlichen Ableitung der Spannung.

Im Falle einer sinusförmigen Spannung beträgt damit der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom -90° (der Strom eilt der Spannung um 90° voraus).



Induktivität L

Die grundlegende Beziehung lautet (siehe Abschnitt 10):

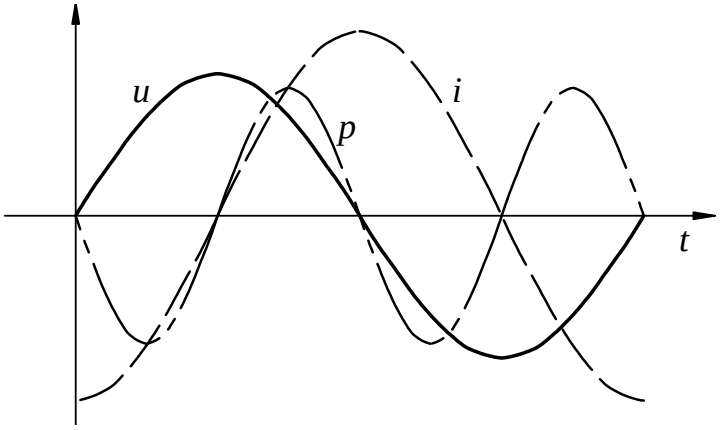
$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt$$

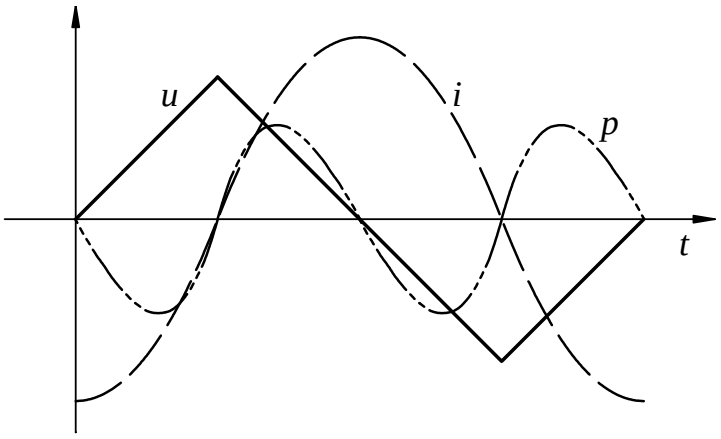
Ist die Spannung gegeben, so ist der Strom immer proportional zum Integral der Spannung über die Zeit.

Im Falle einer sinusförmigen Spannung beträgt damit der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom +90° (die Spannung eilt dem Strom um 90° voraus).

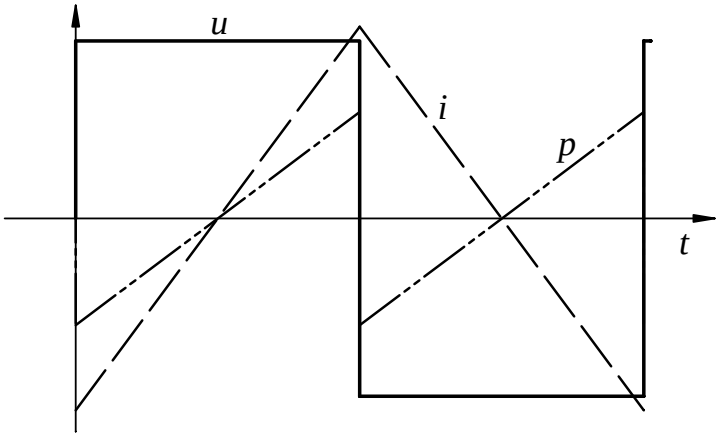
Sinusförmige Spannung



Dreieckförmige Spannung



Rechteckförmige Spannung



5.3 Sinusförmige Spannungen und Ströme

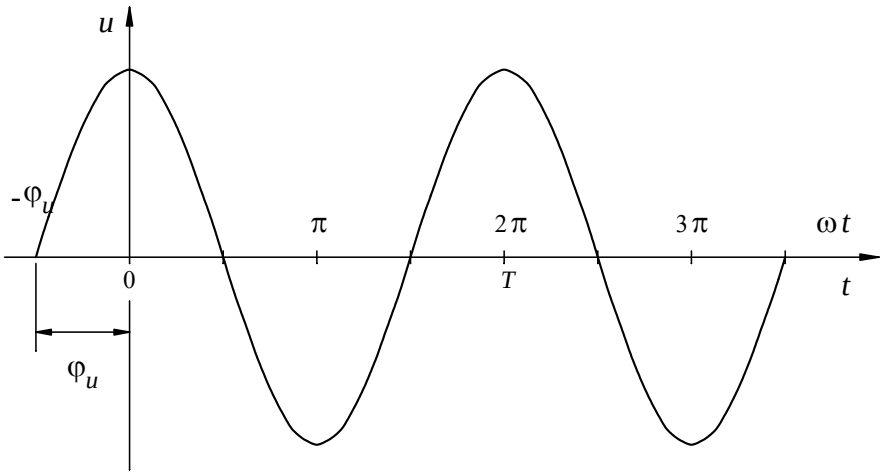
5.3.1 Sinusförmige Wechselgröße

Periodendauer, Frequenz, Kreisfrequenz und Wellenlänge:

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$\varphi_u > 0 \rightarrow$ voreilender Sinus

$$\omega \cdot T = 2\pi$$



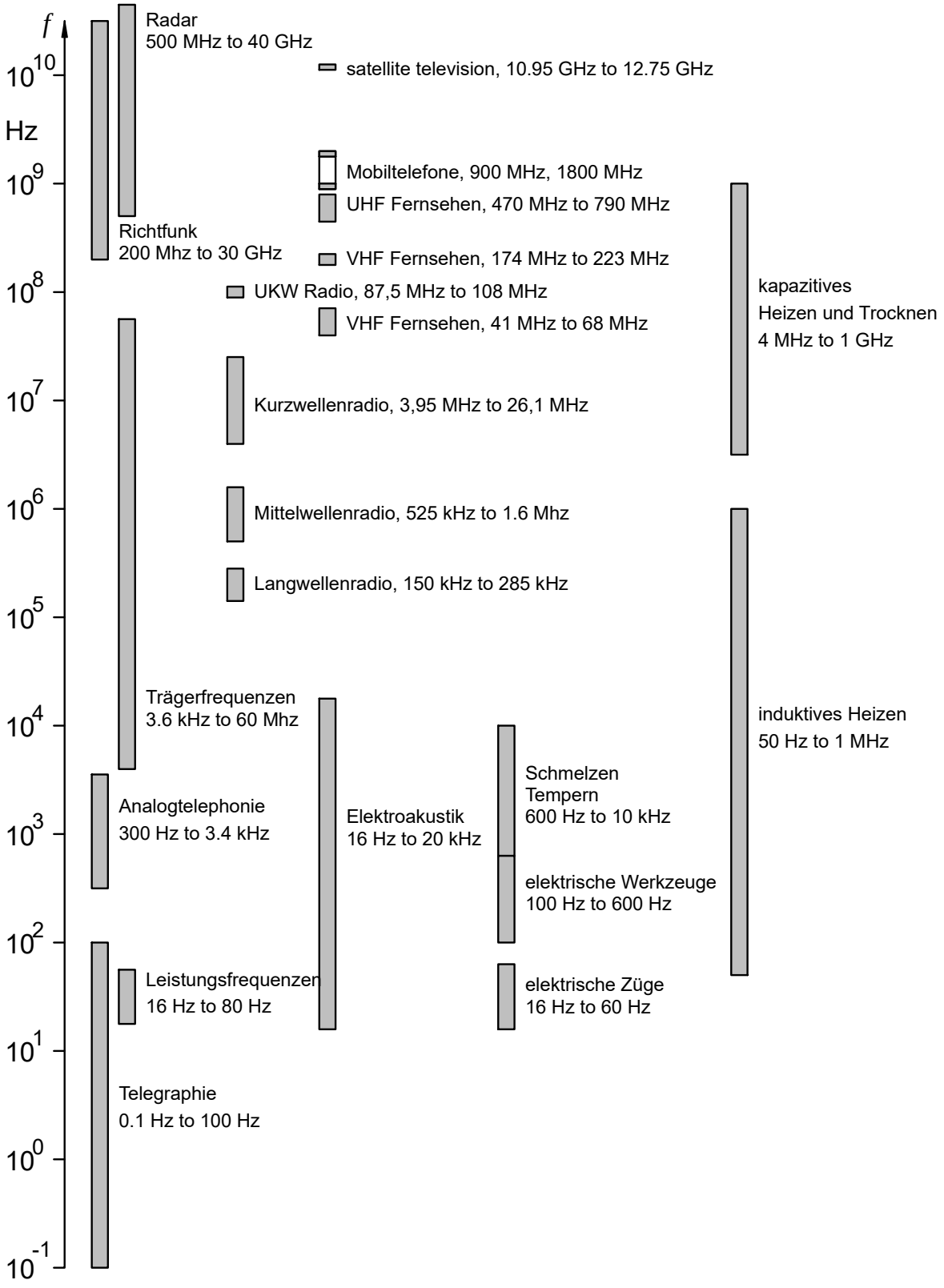
Die Beziehungen zur Beschreibung sinusförmiger Größen sind im Folgenden angegeben:

(Null)Phasenwinkel	φ	$[\text{rad},\ ^\circ]$
Kreisfrequenz	$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$	$\left[s^{-1}\right]$
Frequenz	$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$	$[\text{Hz}]$
Periodendauer	$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$	$[s]$
Wellenlänge	$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$	$[m]$

Die Wellenlänge ist der während einer Periodendauer zurückgelegte Weg.

Lichtgeschwindigkeit $\boxed{c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$

5.3.2 Frequenzbereiche technischer Wechselspannungen

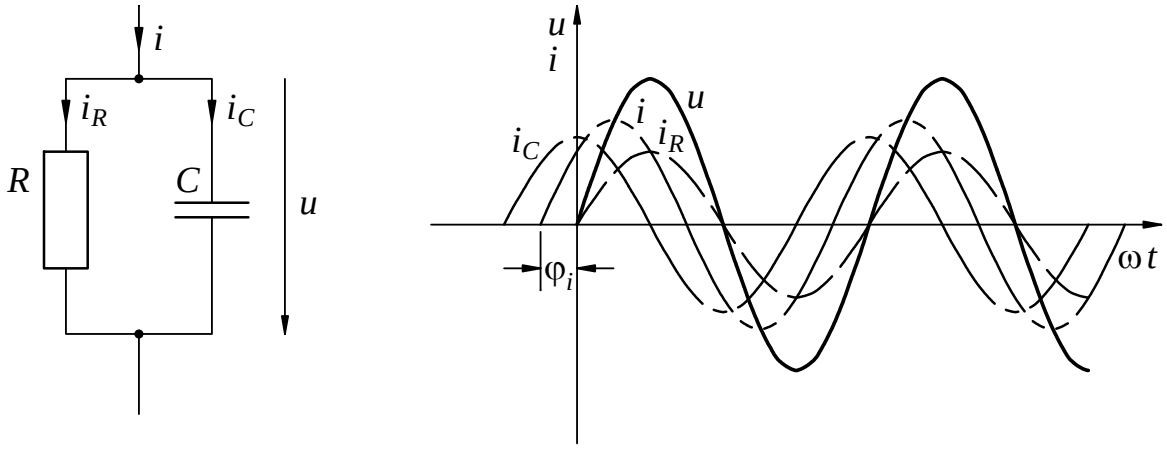


Infrarot $3 \cdot 10^{12} ... 3{,}8 \cdot 10^{14} Hz$

sichtbares Licht $3{,}8 \cdot 10^{14} ... 7{,}9 \cdot 10^{14} Hz$ $(380 ... 780 nm)$

5.3.3 Überlagerung sinusförmiger Spannungen und Ströme

Stromverlauf i(t) bei sinusförmiger Spannung $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ an einer linearen Schaltung:



Behauptung: Auch der Gesamtstrom *i(t)* als Summe der beiden Teilströme $i_R(t)$ und $i_C(t)$ ist sinusförmig und verläuft nach der Funktion $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$

Beweis: $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos\varphi_i \cdot \sin(\omega t) + \hat{i} \cdot \sin\varphi_i \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t) + \hat{i}_C \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

Wird ein lineares Netzwerk von einer Sinusquelle der Frequenz *f* gespeist, dann sind alle Spannungen und Ströme im Netzwerk ebenfalls sinusförmig und haben ebenfalls die Frequenz *f*.

Weiter Beispiel oben: Berechnung der abgegebenen Leistung

$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $\qquad$ $i(t) = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega t) + \hat{i}_C \cdot \cos(\omega t)$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \cdot \hat{i}_R \cdot \sin^2(\omega t) + \hat{u} \cdot \hat{i}_C \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha) \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin(\alpha) \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}}$$

$$p(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}_R}{2} \cdot \left[\cos(\omega t - \omega t) - \cos(\omega t + \omega t)\right] + \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}_C}{2} \cdot \left[\sin(\omega t - \omega t) + \sin(\omega t + \omega t)\right]$$

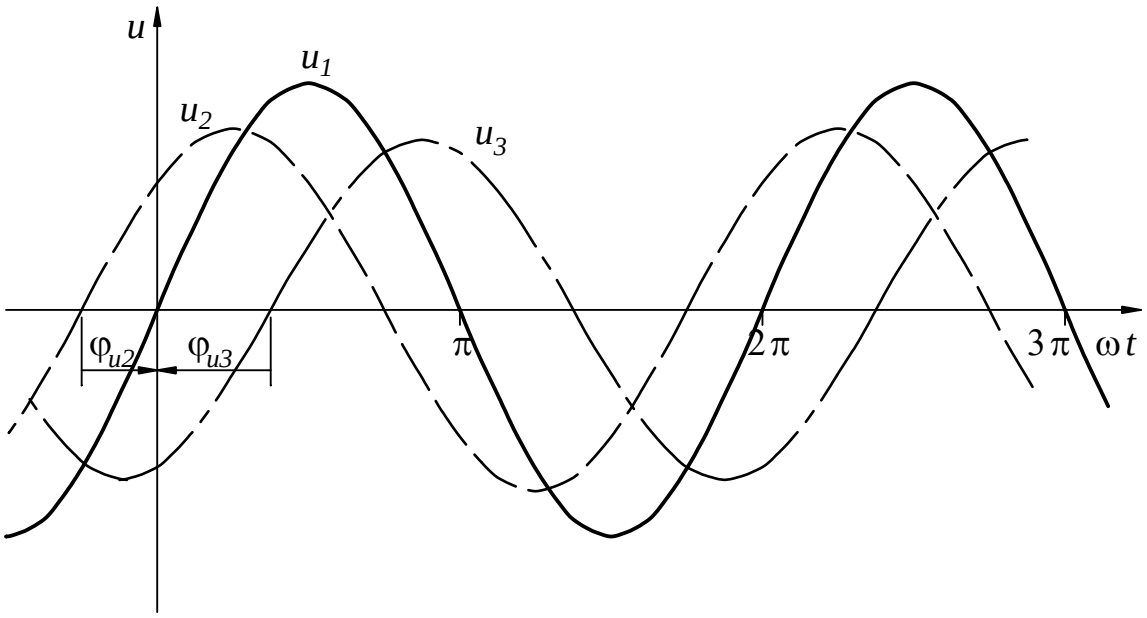
$$p(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}_R}{2} \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \omega t)\right] + \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}_C}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t)$$

$$P = \overline{p(t)} = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}_R}{2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}_R}{\sqrt{2}} = U \cdot I_R$$

Die an jedem Element der Schaltung umgesetzte Leistung hat einen Gleichanteil und einen sinusförmigen Anteil, der die doppelte Frequenz der Sinusquelle aufweist.

5.4 Darstellungen sinusförmiger Spannungen und Ströme

5.4.1 Zeitlinienbild



Dargestellt sind drei Zeitfunktionen:

$$u_1 = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$u_2 = \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u2})$ mit $\varphi_{u2} > 0$, eilt u_1 vor!

$u_3 = \hat{u}_3 \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u3})$ mit $\varphi_{u3} < 0$, eilt u_1 nach!

Zur Bestimmung des Nullphasenwinkels φ betrachtet man den positiven Nulldurchgang, der dem Nullpunkt am nächsten liegt. Der Nullphasenwinkel wird (mit richtigem Vorzeichen) durch den Zählpfeil gekennzeichnet, der von diesem Nulldurchgang zum Nullpunkt hin gerichtet ist.

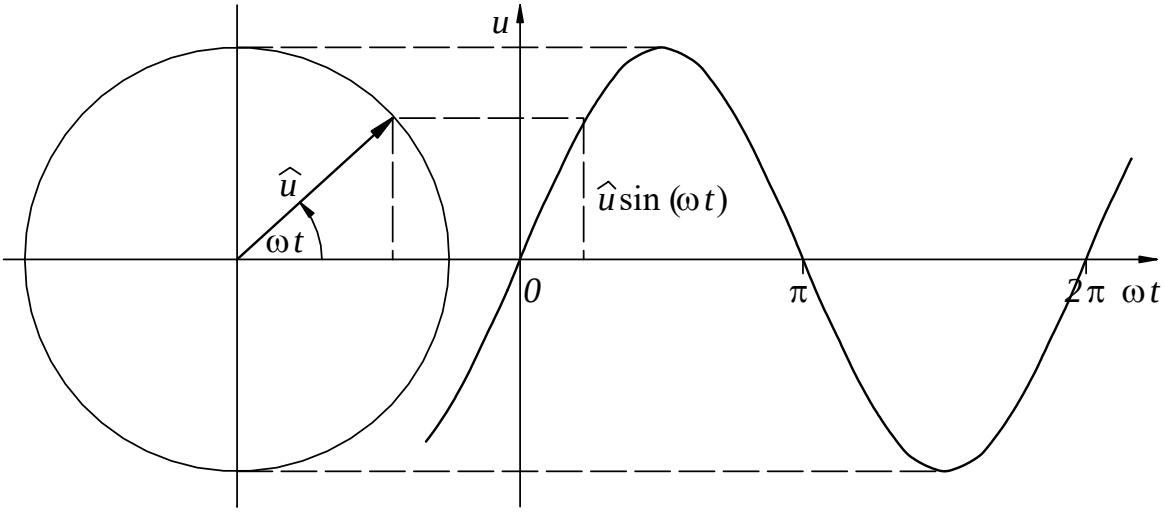
Besondere Nullphasenwinkel von ±90°:

$$\varphi = 90° \quad \sin(\omega t + 90°) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t) \qquad \text{voreilend}$$

$$\varphi = -90° \quad \sin(\omega t - 90°) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega t) \qquad \text{nacheilend}$$

5.4.2 Scheitelwertzeigerbild

Eine Sinusgröße lässt sich durch einen rotierenden Zeiger beschreiben, dessen Länge gleich dem Scheitelwert der Sinusgröße ist.



Behauptung: Die Addition zweier sinusförmiger Spannungen (Ströme) ergibt wieder eine(n) sinusförmige(n) Spannung (Strom) derselben Frequenz (siehe nächste Abbildung).

Wenn dies zutrifft, so muss der Scheitelwert der Spannung $\hat{u}$ und der Nullphasenwinkel φ_u der resultierenden Spannung ermittelt werden:

$$\hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u2}) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Mit $\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$ erhält man:

$$\hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t) + \hat{u}_2 \cdot [\sin(\omega t) \cdot \cos\varphi_{u2} + \cos(\omega t) \cdot \sin\varphi_{u2}] = \hat{u} \cdot [\sin(\omega t)\cos\varphi_u + \cos(\omega t) \cdot \sin\varphi_u]$$

$$(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi_{u2} - \hat{u} \cdot \cos\varphi_u) \cdot \sin(\omega t) + (\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi_{u2} - \hat{u} \cdot \sin\varphi_u) \cdot \cos(\omega t) = 0$$

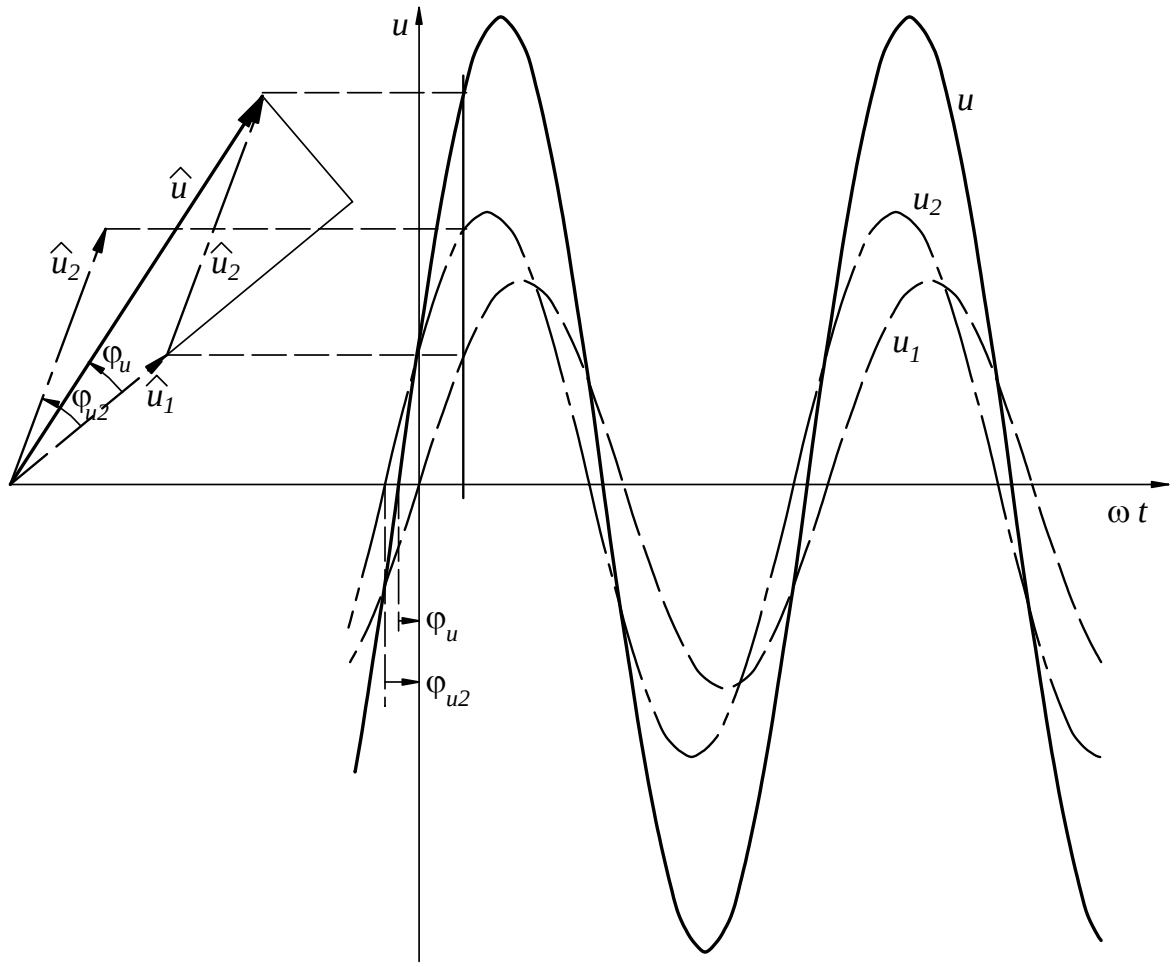
Für beliebige Werte von *t* ist die letzte Gleichung nur dann erfüllt, wenn beide Klammerausdrücke verschwinden, sprich Null ergeben:

$$\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi_{u2} = \hat{u} \cdot \cos\varphi_u \qquad (1)$$

$$\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi_{u2} = \hat{u} \cdot \sin\varphi_u \qquad (2)$$

Der Vergleich mit dem Zeigerdiagramm zeigt:

Man erhält die Summe zweier Zeiger durch geometrische Addition (wie bei Vektoren).



Die beiden letzten Gleichungen (1) und (2) bilden die Komponenten des resultierenden Zeigers *u*. Um den Scheitelwert $\hat{u}$ zu bestimmen, müssen beide Gleichungen quadriert und addiert werden:

$$\hat{u}_1^{\,2} + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi_{u2} + \hat{u}_2^{\,2} \cdot \cos^2\varphi_{u2} + \hat{u}_2^{\,2} \cdot \sin^2\varphi_{u2} = \hat{u}^2 \cdot \cos^2\varphi_u + \hat{u}^2 \cdot \sin^2\varphi_u$$

$$\hat{u}_1^{\,2} + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi_{u2} + \hat{u}_2^{\,2} = \hat{u}^2$$

$$\hat{u} = \sqrt{\hat{u}_1^{\,2} + 2 \cdot \hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi_{u2} + \hat{u}_2^{\,2}}$$

Der Tangens des Nullphasenwinkels ist gleich dem Verhältnis der beiden Komponenten:

$$\tan\varphi_u = \frac{\hat{u}_2 \cdot \sin\varphi_{u2}}{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 \cdot \cos\varphi_{u2}}$$

Die Tatsache, dass man eindeutige, nicht zeitabhängige Ergebnisse für $\hat{u}$ und φ_u erhält, beweist die Richtigkeit des Ansatzes.

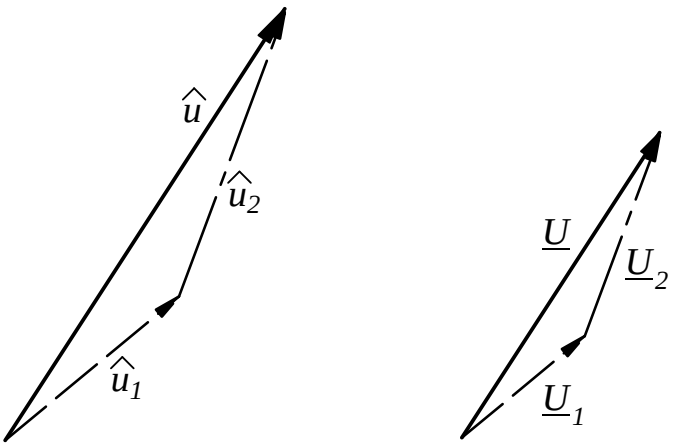
5.4.3 Effektivwertzeigerbild

Anstatt die Scheitelwerte zu benutzen, kann ein Zeigerdiagramm auch mit den Effektivwerten einer Sinusgröße dargestellt werden. Die Hauptunterschiede dieser zwei Diagramme sind:

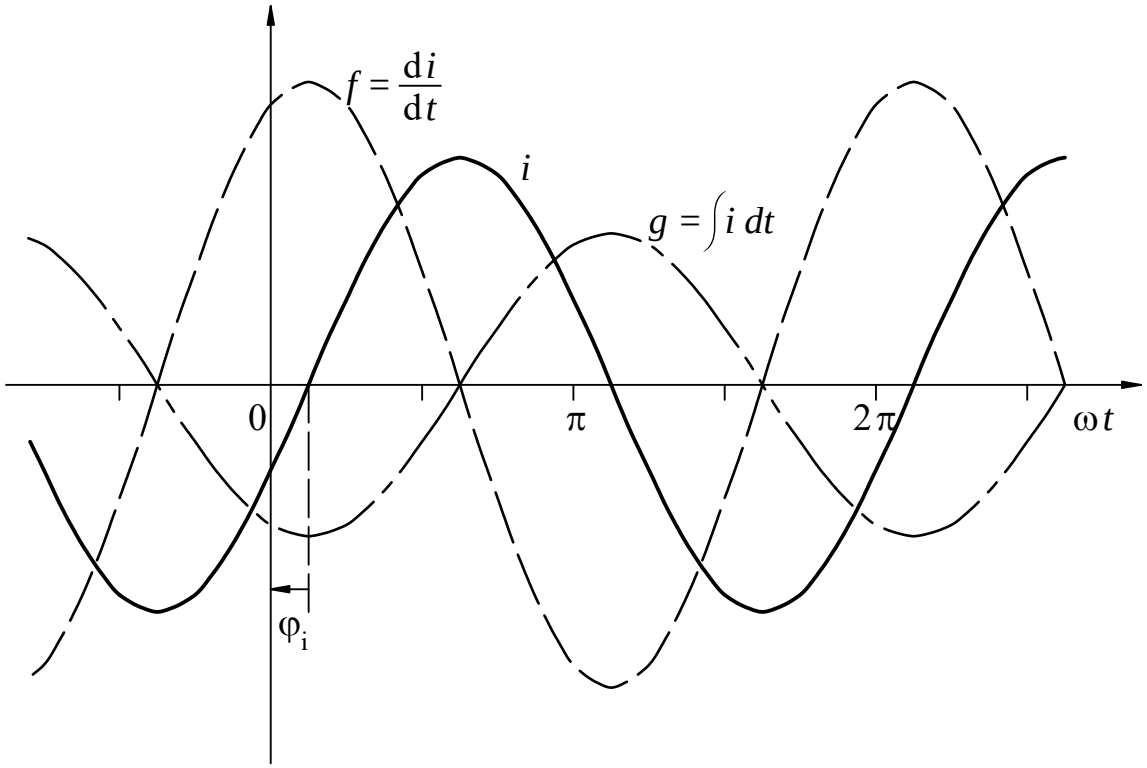
- Die Länge des Scheitelwertzeigers gibt den Scheitelwert an.
- Die Länge des Effektivwertzeigers gibt den Effektivwert an. Für eine Sinusgröße ist er, verglichen mit dem Scheitelwert, um einen Faktor $1/\sqrt{2}$ kürzer.
- Scheitelwertzeiger werden als mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehend betrachtet.
- Effektivwertzeiger werden als stillstehend betrachtet.

Diese letzte Unterscheidung ist nur eine Vereinbarung. Die Addition der Zeiger erfolgt geometrisch (wie Vektoren).

- Die Lage des ersten Zeigers ist willkürlich.
- Die Richtung der Zeiger relativ zueinander liegt eindeutig fest.



5.4.4 Differentiation und Integration sinusförmiger Schwingungsverläufe



Wir betrachten eine sinusförmige Funktion, ihre Ableitung und ihr Integral. Die gezeigte Zeitfunktion ist gegeben über:

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Ihr Nullphasenwinkel ist $\varphi_i < 0$; die Sinuskurve eilt nach.

Differentiation:
$$f = \frac{di}{dt} = \omega \cdot \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

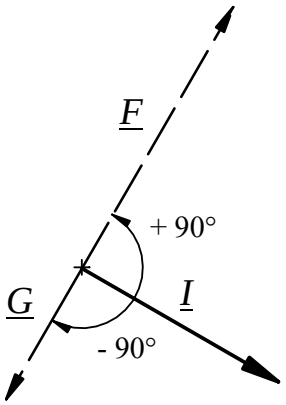
$$f = \omega \cdot \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

Integration:
$$g = \int i \cdot dt = \frac{1}{\omega} \cdot \hat{i} \cdot \left[-\cos(\omega t + \varphi_i)\right]$$

$$g = \frac{\hat{i}}{\omega} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

Differentiation	→	Multiplikation mit ω und Drehung um + 90°
Integration	→	Division durch ω und Drehung um – 90°

Alle drei Funktionen können nun auch als Effektivwertzeiger dargestellt werden



5.4.5 Effektivwertzeigerbild in der Gauß'schen Zahlenebene

Zeiger sind zweidimensionale Vektoren, welche über zwei Komponenten beschrieben werden können. Für viele mathematische Anwendungen ist es zweckmäßig, einen Zeiger durch eine komplexe Zahl darzustellen. Um eine Verwechslung mit dem Augenblickswert des elektrischen Stromes *i* auszuschließen, wird die imaginäre Einheit in der komplexen Wechselstromrechnung bevorzugt mit *j* bezeichnet.

Eine komplexe Zahl $\underline{r}$ hat einen Realteil *a* und einen Imaginärteil *b* und lässt sich ausdrücken über:

$$\underline{r} = a + jb$$

Definition: $j = \sqrt{-1}$ und $j^2 = -1$

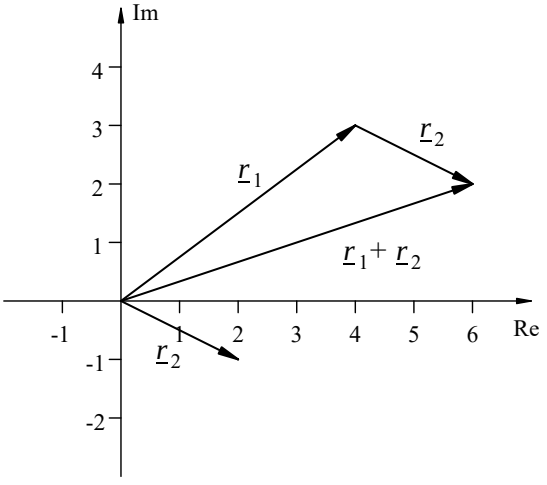
Eine wichtige Folgerung aus dieser Definition ist: $\frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{-1} = -j$

Die Addition zweier komplexer Zahlen erfolgt durch jeweilige Addition ihrer Real-und Imaginärteile.

Beispiel (siehe auch Zeichnung):

$\underline{r}_1 = 4 + j3$
$\underline{r}_2 = 2 - j$

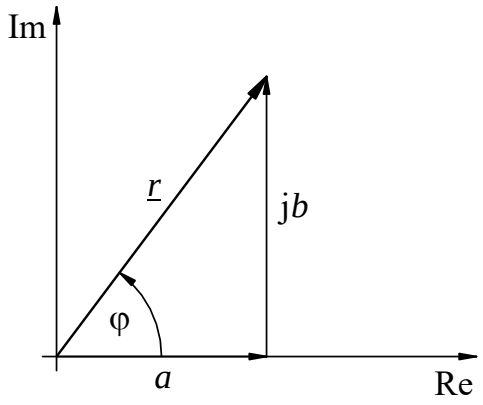
$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2 = 4 + j3 + 2 - j = \underline{\underline{6 + j2}}$



Multiplikation dieser beiden komplexen Zahlen:

$\underline{r} = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = (4 + j3) \cdot (2 - j)$
$= 8 + j6 - j4 - 3j^2 = \underline{\underline{11 + j2}}$

Wie oben gezeigt, kann ein Zeiger in der komplexen Zahlenebene durch seinen Realteil *a* und seinen Imaginärteil *b* beschrieben werden. Eine andere Möglichkeit wäre es, seinen Betrag oder seine Länge *r* und den Winkel φ zwischen dem Zeiger und der realen Achse anzugeben.



Darstellung komplexer Zahlen	
Kartesische Form Rechtwinklige Koordinaten	Exponentialform Polarkoordinaten
$\underline{r} = a + jb$	$\underline{r} = r\,e^{j\varphi}$
Umrechungsformeln	
$a = r\cos\varphi$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b = r\sin\varphi$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$

Die Exponentialform ergibt sich aus der Eulerschen Formel:

$$\boxed{\cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi) = e^{j\varphi}}$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen kann nur erfolgen, sofern die Zahlen in kartesischer Form gegeben sind.

Multiplikation und Division komplexer Zahlen kann am leichtesten durchgeführt werden, wenn die Zahlen in Exponentialform gegeben sind:

$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = \left(r_1 \cdot e^{j\varphi_1}\right)\cdot\left(r_2 \cdot e^{j\varphi_2}\right) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\underline{r}_1 \div \underline{r}_2 = \frac{\left(r_1 \cdot e^{j\varphi_1}\right)}{\left(r_2 \cdot e^{j\varphi_2}\right)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Diese Operationen können aber auch (mit größerem Aufwand) in kartesischer Form durchgeführt werden:

$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = \left(a_1 + jb_1\right)\cdot\left(a_2 + jb_2\right) = a_1\cdot a_2 + ja_1\cdot b_2 + ja_2\cdot b_1 - b_1\cdot b_2$$
$$\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = \left(a_1\cdot a_2 - b_1\cdot b_2\right) + j\left(a_1\cdot b_2 + a_2\cdot b_1\right)$$

$$\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{\left(a_1 + jb_1\right)\cdot\left(a_2 - jb_2\right)}{\left(a_2 + jb_2\right)\cdot\left(a_2 - jb_2\right)} = \frac{a_1\cdot a_2 - ja_1\cdot b_2 + ja_2\cdot b_1 + b_1\cdot b_2}{a_2^{\,2} - ja_2\cdot b_2 + ja_2\cdot b_2 + b_2^{\,2}}$$
$$\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_2} = \frac{a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} + j\frac{a_2\cdot b_1 - a_1\cdot b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}$$

Einige spezielle und wichtige komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis:

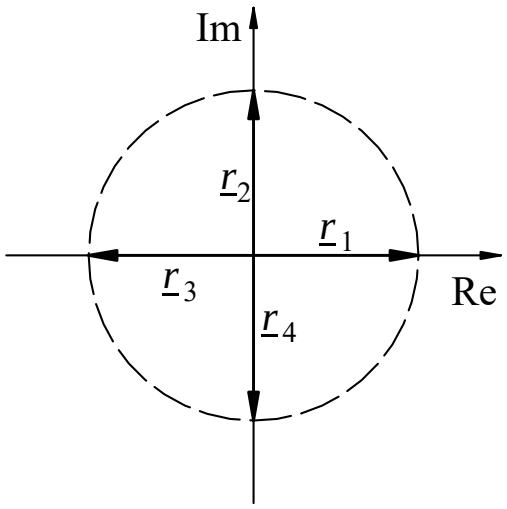
$$\underline{r}_1 = 1 \cdot e^{j0} = e^{j0°} = \cos 0° + j \sin 0° = +1$$

$$\underline{r}_2 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j90°} = \cos 90° + j \sin 90° = +j$$

$$\underline{r}_3 = 1 \cdot e^{j\pi} = e^{j180°} = \cos 180° + j \sin 180° = -1$$

$$\underline{r}_4 = 1 \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{j270°} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{-j90°} =$$

$$= \cos(-90°) + j \sin(-90°) = -j = \frac{1}{j}$$



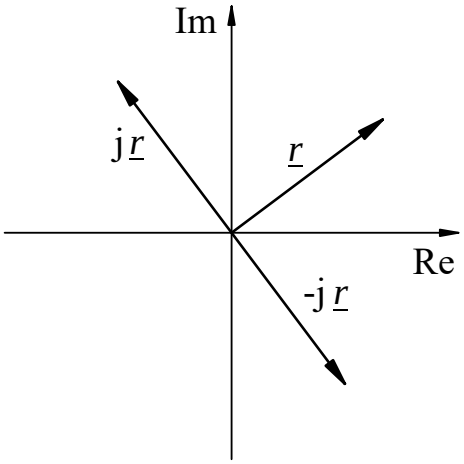
Multiplikation einer beliebigen komplexen Zahl $\underline{r}$ mit j bzw. mit $-j$:

$$j \cdot \underline{r} = e^{j90°} \cdot r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot e^{j(\varphi + 90°)}$$

Drehung des Zeigers r um **+ 90°**
(wie bei der Differentiation erforderlich)

$$\frac{\underline{r}}{j} = -j \cdot \underline{r} = e^{-j90°} \cdot r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot e^{j(\varphi - 90°)}$$

Drehung des Zeigers r um **– 90°**
(wie bei der Integration erforderlich)



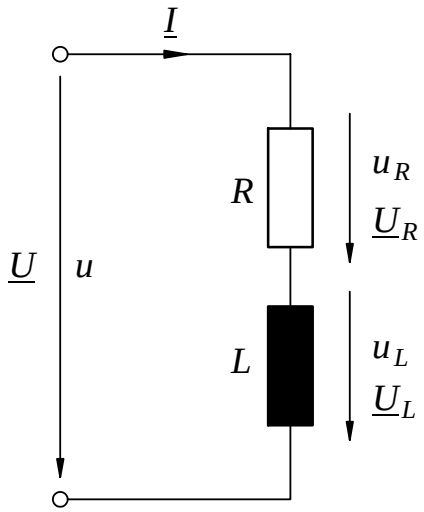
5.5 Berechnung von Wechselstromkreisen

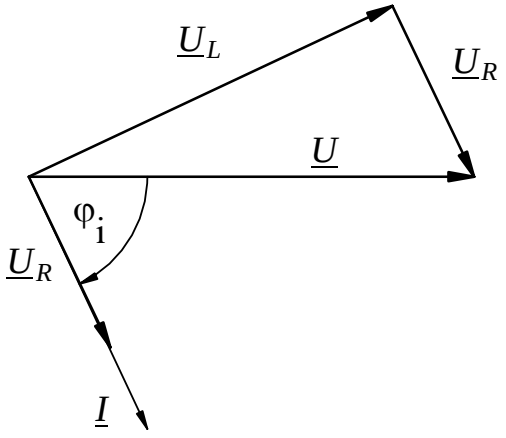
5.5.1 Grundsätzliche Betrachtung

Wir können sinusförmige Vorgänge der gleichen Frequenz verschieden darstellen:

	Zeitfunktionen	Zeigerdiagramme	Komplexe Größen
Addition	Überlagerung der Zeitfunktionen	geometrische Addition der Zeiger	Addition der komplexen Größen
Multiplikation mit (-1)	Vorzeichenumkehr; d.h. Phasenverschiebung um 180°	Richtungsumkehr des Zeigers	Multiplikation der komplexen Größe mit (-1)
Multiplikation mit einem positiven, reellen Faktor			
Differentiation	Differentiation, d.h. Phasenverschiebung um +90° und Multiplikation mit ω	Drehung um + 90° und Multiplikation mit ω	Multiplikation der komplexen Größe mit $j\omega$
Integration	Integration, d.h. Phasenverschiebung um-90° und Division durch ω	Drehung um - 90° und Division durch ω	Division der komplexen Größe durch $j\omega$

Beispiel eines Wechselstromkreises und des dazugehörigen Zeigerdiagrammes (Der Zeiger für *U* ist willkürlich entlang der reellen Achse gelegt)





Kleinbuchstaben stellen Größen dar, welche mit der Zeit variieren, während die unterstrichenen Großbuchstaben für komplexe Effektivwerte stehen.

Für die Zeitfunktionen erhalten wir:

$$u = u_R + u_L = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Wenn wir die gleichen Beziehungen in komplexen Effektivwerten ausdrücken, erhalten wir:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U} = (R + j\omega L) \cdot \underline{I} \qquad \text{und} \qquad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L}$$

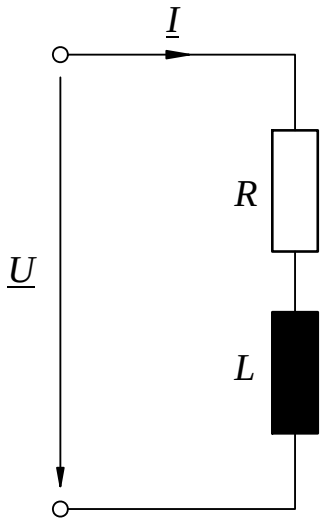
Wir überführen die letzte Gleichung in Polarkoordinaten:

$$\underline{I} = \frac{U \cdot e^{j0}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j \arctan \frac{\omega L}{R}}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \arctan \frac{\omega L}{R}}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \qquad \varphi_i = -\arctan \frac{\omega L}{R}$$

5.5.2 Komplexer Widerstand und komplexer Leitwert

Beispiel:



Die Beziehung zwischen Strom und Spannung wird vorgegeben durch:

$$\underline{U} = (R + j\omega L) \cdot \underline{I}$$

Der Ausdruck in den Klammern ist der komplexe Widerstand $\underline{Z}$:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$
$$\underline{Z} = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Die Umkehrung der Gleichungen ergibt:

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$$
$$\underline{Y} = G + jB = Y \cdot e^{j\varphi_y}$$

Definitionen:

	$\underline{Z}$	= komplexer Widerstand, Impedanz = Widerstandsoperator
R =	Re $\underline{Z}$	= Wirkwiderstand (Resistanz)
X =	Im $\underline{Z}$	= Blindwiderstand (Reaktanz)
Z =	$\lvert\underline{Z}\rvert$	= Scheinwiderstand, Impedanz
φ =	Arg $\underline{Z}$	= Phasenwinkel (= φ_z)
	$\underline{Y}$	= komplexer Leitwert, Admittanz = Leitwertsoperator
G =	Re $\underline{Y}$	= Wirkleitwert (Konduktanz)
B =	Im $\underline{Y}$	= Blindleitwert (Suszeptanz)
Y =	$\lvert\underline{Y}\rvert$	= Scheinleitwert, Admittanz
φ_y =	Arg $\underline{Y}$	= Phasenwinkel

In polaren Koordinaten ist die Beziehung zwischen $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi} = Y \cdot e^{j\varphi_y} \qquad \text{also:} \quad \boxed{Y = \frac{1}{Z} \qquad \varphi_y = -\varphi}$$

In rechtwinkligen Koordinaten erhalten wir:

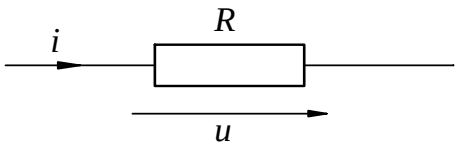
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j\frac{-X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

also: $$\boxed{G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}}$$

5.5.3 Grundelemente *R*, *L* und *C*

Durchflossen vom Strom

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

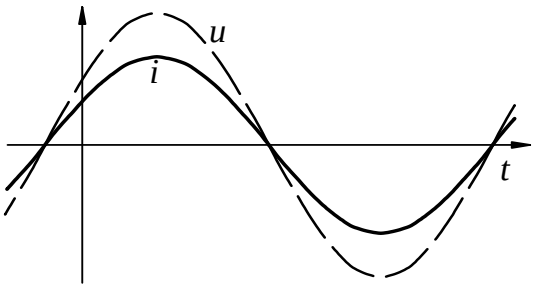


Ohm'scher Widerstand

$$u = R \cdot i$$

Zeitfunktion

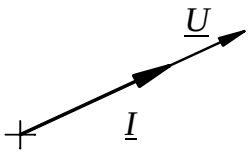
$$u(t) = R \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$



Zeigerdiagramm Spannung / Strom

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$$

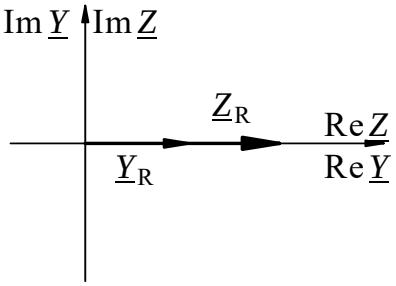
$$\underline{I} = \frac{1}{R} \cdot \underline{U}$$



Zeigerdiagramm Impedanz / Admittanz

$$\underline{Z}_R = R$$

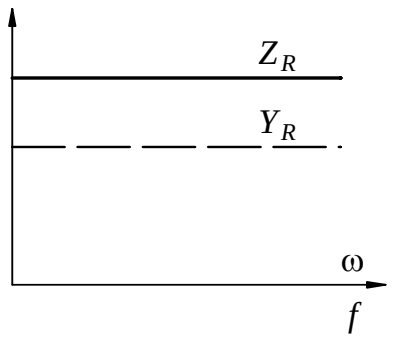
$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$$



Betrag von Impedanz und Admittanz
als Funktion der (Kreis)frequenz

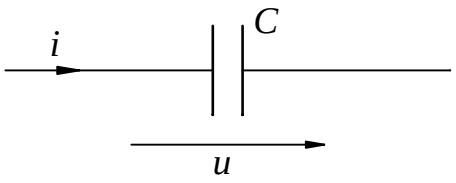
$$Z_R = R$$

$$Y_R = \frac{1}{R}$$



Kapazität

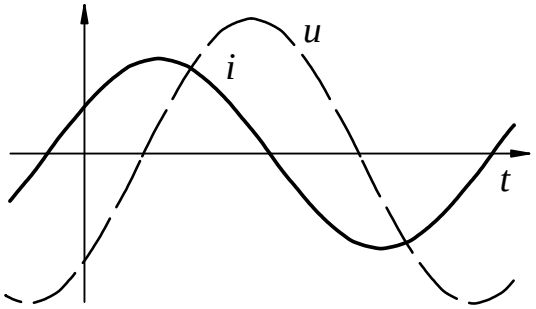
$$u = \frac{1}{C} \cdot \int i dt$$



Zeitfunktion

$$u(t) = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i} \cdot \left[- \cos\left(\omega t + \varphi_i\right) \right]$$

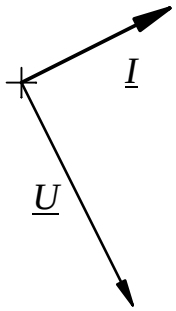
$$u(t) = \frac{1}{\omega C} \cdot \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_i - 90°\right)$$



Zeigerdiagramm Spannung / Strom

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$$

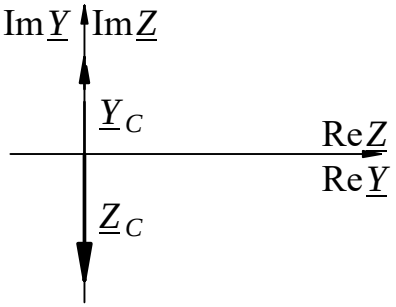
$$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$$



Zeigerdiagramm Impedanz / Admittanz

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

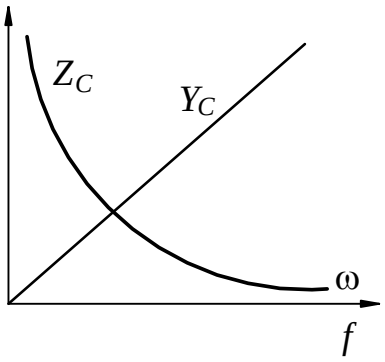
$$\underline{Y}_C = j\omega C$$



Betrag von Impedanz und Admittanz
als Funktion der (Kreis)frequenz

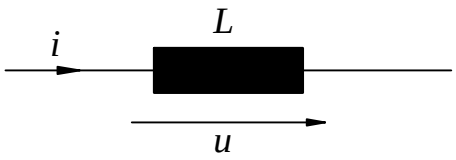
$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$Y_C = \omega C$$



Induktivität

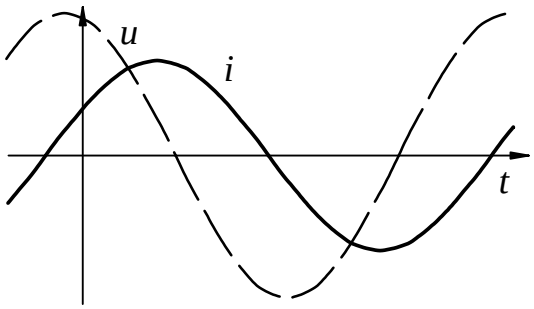
$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$



Zeitfunktion

$$u(t) = \omega L \cdot \hat{i} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_i\right)$$

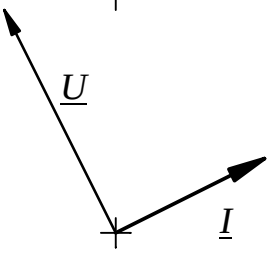
$$u(t) = \omega L \cdot \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_i + 90°\right)$$



Zeigerdiagramm Spannung / Strom

$$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$$

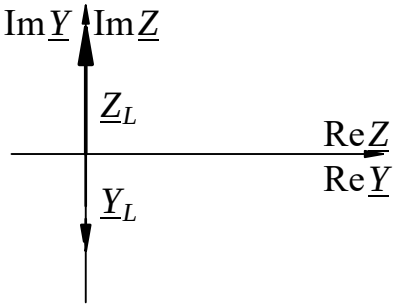
$$\underline{I} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{U}$$



Zeigerdiagramm Impedanz / Admittanz

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

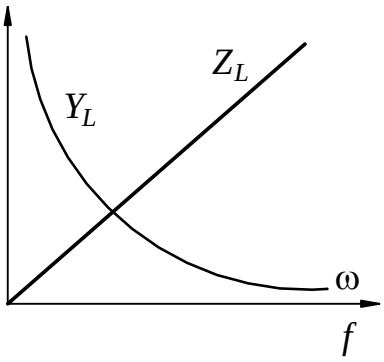
$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$$



Betrag von Impedanz und Admittanz als Funktion der (Kreis)frequenz

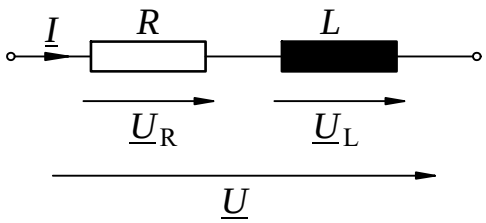
$$Z_L = \omega L$$

$$Y_L = \frac{1}{\omega L}$$



5.5.4 *RL*-Reihenschaltung

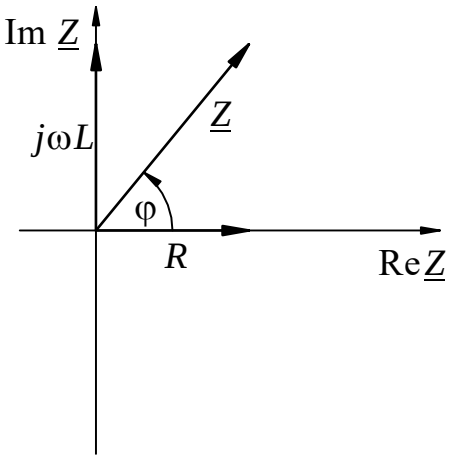
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I}$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j\omega L = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

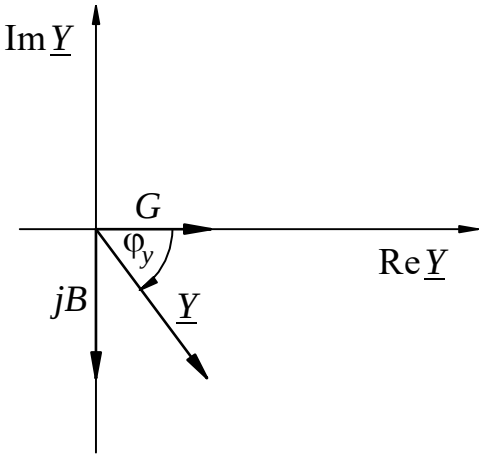


$$Y = \frac{1}{Z} \qquad \varphi_y = -\varphi$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L}$$

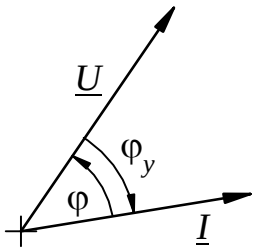
$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\frac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \qquad B = \frac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$



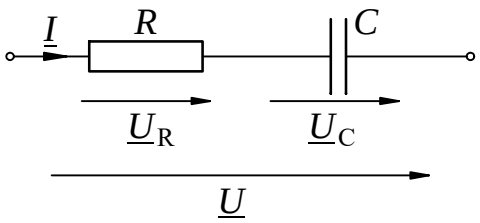
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = Z \cdot I \cdot e^{j(\varphi_i + \varphi)}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = Y \cdot U \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_y)}$$



5.5.5 *RC*-Reihenschaltung

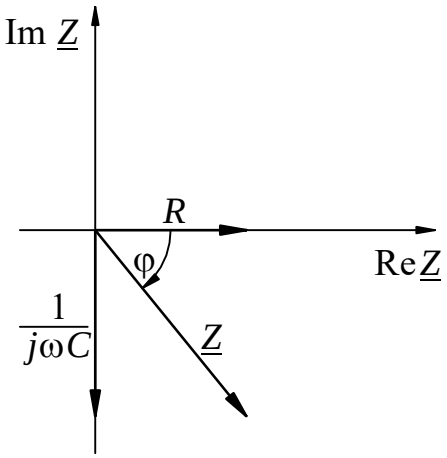
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = R \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\frac{-1}{\omega C}\right) = Z \cdot e^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

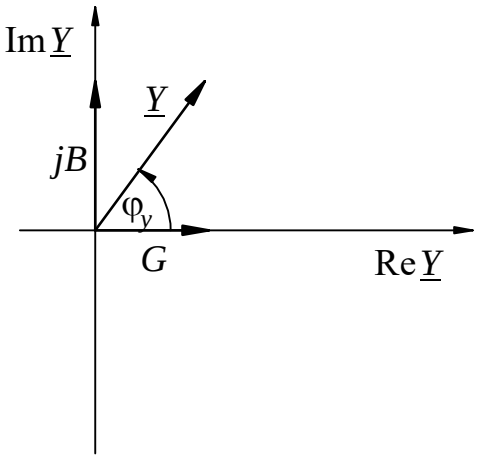
$$\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega C \cdot R}\right)$$



$$Y = \frac{1}{Z} \qquad \varphi_y = -\varphi$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} \cdot \frac{R + j\frac{1}{\omega C}}{R + j\frac{1}{\omega C}}$$

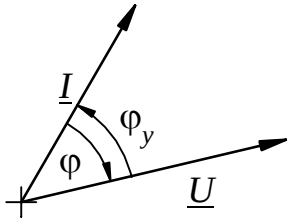
$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j\frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$



$$G = \frac{R}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \qquad B = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

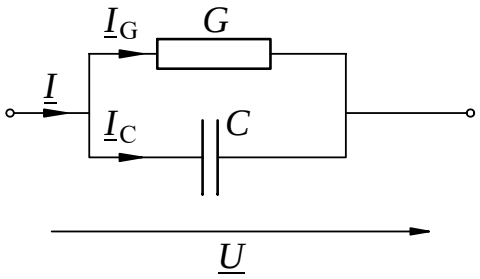
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = Z \cdot I \cdot e^{j(\varphi_i + \varphi)}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = Y \cdot U \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_y)}$$



5.5.6 *RC*-Parallelschaltung

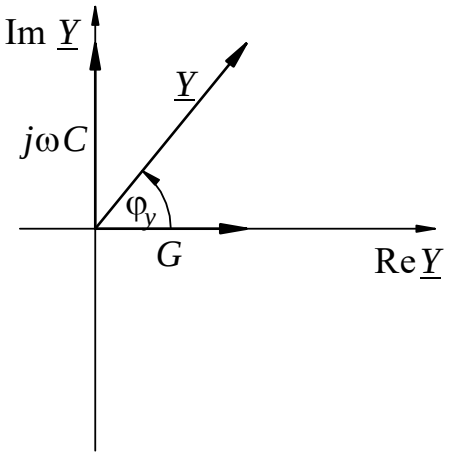
$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C = G \cdot \underline{U} + j\omega C \cdot \underline{U}$$



$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + j\omega C = Y \cdot e^{j\varphi_y}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}$$

$$\varphi_y = \arctan \frac{\omega C}{G}$$

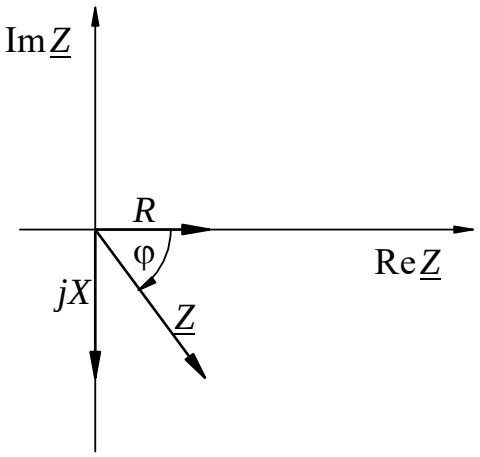


$$Z = \frac{1}{Y} \qquad \varphi = -\varphi_y$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{G + j\omega C} \cdot \frac{G - j\omega C}{G - j\omega C}$$

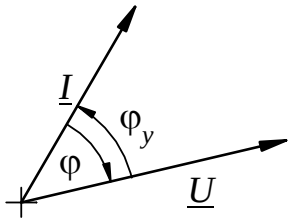
$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} + j\frac{-\omega C}{G^2 + (\omega C)^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} \qquad X = \frac{-\omega C}{G^2 + (\omega C)^2}$$



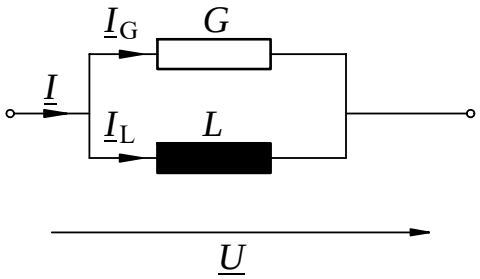
$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = Z \cdot I \cdot e^{j(\varphi_i + \varphi)}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = Y \cdot U \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_y)}$$



5.5.7 *RL*-Parallelschaltung

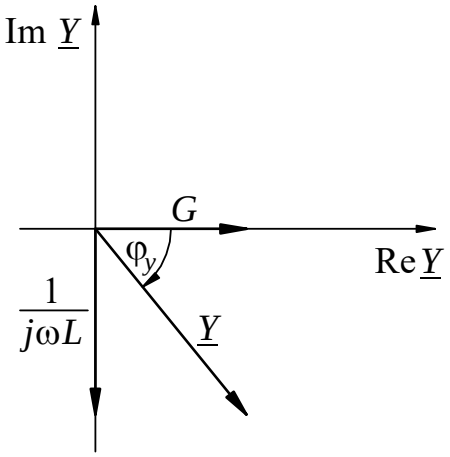
$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_L = G \cdot \underline{U} + \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{U}$$



$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\frac{-1}{\omega L}\right) = Y \cdot e^{j\varphi_y}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

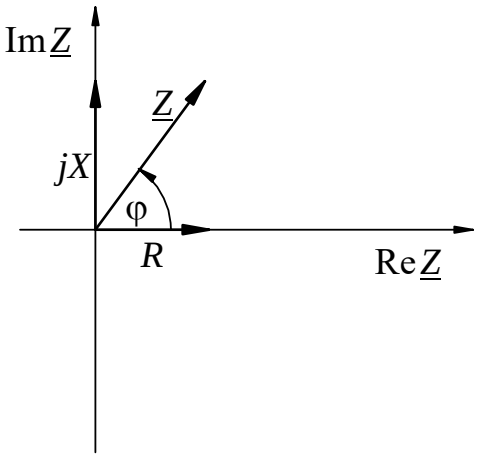
$$\varphi_y = \arctan\left(-\frac{1}{\omega L \cdot G}\right)$$



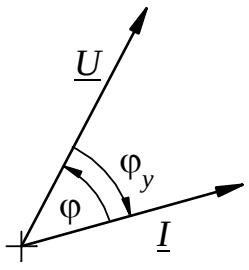
$$Z = \frac{1}{Y} \qquad \varphi = -\varphi_y$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{G - j\frac{1}{\omega L}} \cdot \frac{G + j\frac{1}{\omega L}}{G + j\frac{1}{\omega L}}$$

$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}} + j\frac{\frac{1}{\omega L}}{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}}$$



$$R = \frac{G}{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \qquad X = \frac{\frac{1}{\omega L}}{G^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2}}$$

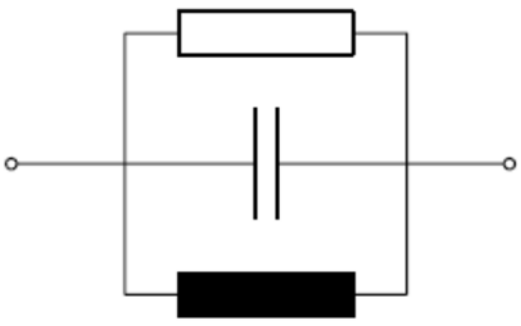


$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = Z \cdot I \cdot e^{j(\varphi_i + \varphi)}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} = Y \cdot U \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_y)}$$

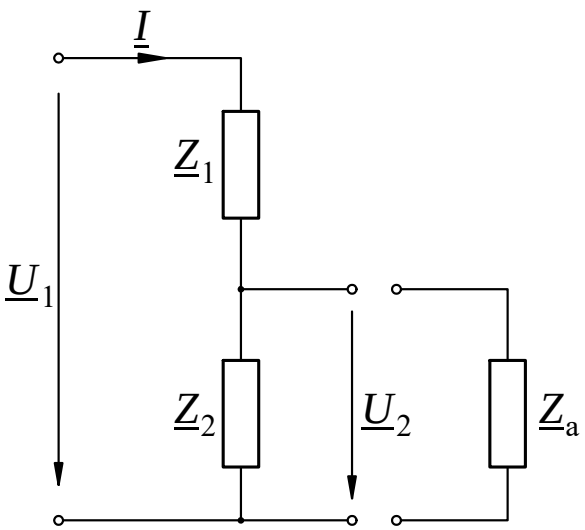
5.5.8 Dualität

Reihenschaltung	Parallelschaltung
Leerlauf	Kurzschluss
Ideale Spannungsquelle	Ideale Stromquelle
Komplexe Spannung $\underline{U}$ Effektivwert U Winkel φ_u	Komplexer Strom $\underline{I}$ Effektivwert I Winkel φ_i
Komplexer Widerstand $\underline{Z}$ Scheinwiderstand Z Phasenwinkel φ Wirkwiderstand R Blindwiderstand X	Komplexer Leitwert $\underline{Y}$ Scheinleitwert Y Phasenwinkel φ_y Wirkleitwert G Blindleitwert B
Induktivität L	Kapazität C

Energieinhalt einer stromdurchflossenen Spule $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$	Energieinhalt eines aufgeladenen Kondensators $W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$
RL-Reihenschaltung $\underline{Z} = R + j\omega L$ $\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\frac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$	RC-Parallelschaltung $\underline{Y} = G + j\omega C$ $\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2} + j\frac{-\omega C}{G^2 + (\omega C)^2}$
Reihenschwingkreis 	Parallelschwingkreis 

5.6 Beispiele für Wechselstromschaltungen

5.6.1 Spannungsteiler



unbelastet:

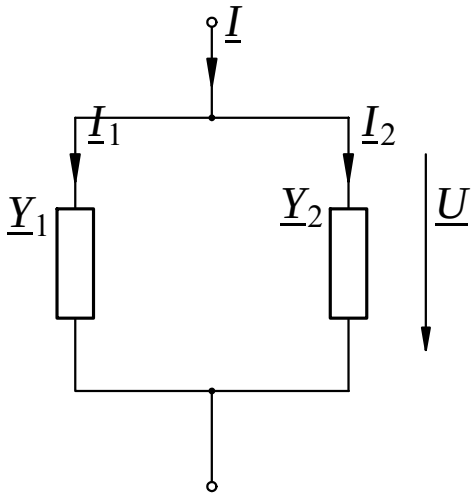
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \cdot \underline{I}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

wie bei Gleichstrom, nur mit komplexen Größen!

Belastet:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_a}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_a + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_a}$$

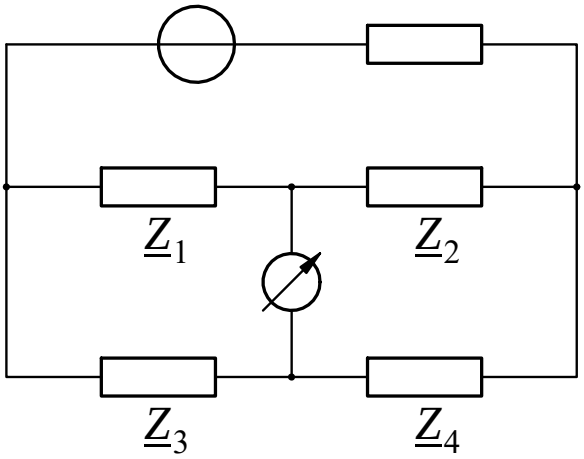
5.6.2 Stromteiler



$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}}{(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \cdot \underline{U}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

5.6.3 Brückenschaltung

Die nächste Abbildung zeigt den grundsätzlichen Aufbau einer Wechselstrombrücke.



Die Abgleichbedingung ist analog zu jener einer Gleichstrombrückenschaltung:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3$$

Wird $\underline{Z} = R + jX$ benutzt, erhält man:

$$(R_1 + jX_1)\cdot(R_4 + jX_4) = (R_2 + jX_2)\cdot(R_3 + jX_3)$$

$$R_1 \cdot R_4 + jR_1 \cdot X_4 + jR_4 \cdot X_1 - X_1 \cdot X_4 = R_2 \cdot R_3 + jR_2 \cdot X_3 + jR_3 \cdot X_2 - X_2 \cdot X_3$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn jeweils die Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten gleich sind:

$$R_1 \cdot R_4 - X_1 \cdot X_4 = R_2 \cdot R_3 - X_2 \cdot X_3$$
$$R_1 \cdot X_4 + R_4 \cdot X_1 = R_2 \cdot X_3 + R_3 \cdot X_2$$

Bei einer Wechselstrombrücke existieren offensichtlich zwei Abgleichbedingungen, was bedeutet, dass eine Wechselstrombrücke zwei einstellbare Elemente benötigt, um sie abzugleichen.

Die physikalische Bedeutung dieser beiden Bedingungen wird offensichtlicher, wenn die Impedanzen in Exponentialform angegeben werden:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 \qquad Z_1 \cdot Z_4 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_4)} = Z_2 \cdot Z_3 \cdot e^{j(\varphi_2+\varphi_3)}$$

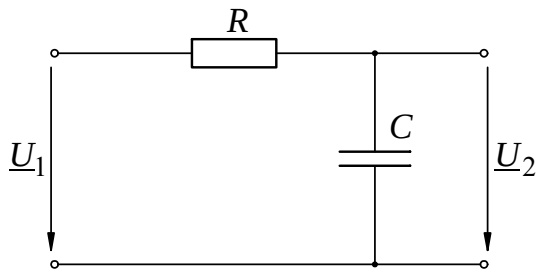
$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3 \qquad \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

Es ist zu erkennen, dass eine Wechselstrombrücke hinsichtlich der Beträge sowie der Phasenwinkel ihrer Impedanzen abgeglichen werden muss.

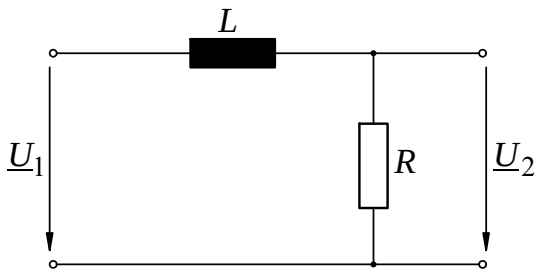
5.6.4 Tiefpass

Eine Tiefpassschaltung ist ein komplexer Spannungsteiler mit einem Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsspannung von eins für niedrige Frequenzen und einem Verhältnis von null für hohe Frequenzen. Die folgende Abbildung zeigt zwei mögliche Schaltungen.

a)



b)



Aus der Beziehung für den Spannungsteiler ergibt sich jeweils:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega C \cdot R}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot \frac{L}{R}}$$

Der Ausdruck τ wird als Zeitkonstante der Schaltung bezeichnet.

$$\tau = R \cdot C$$

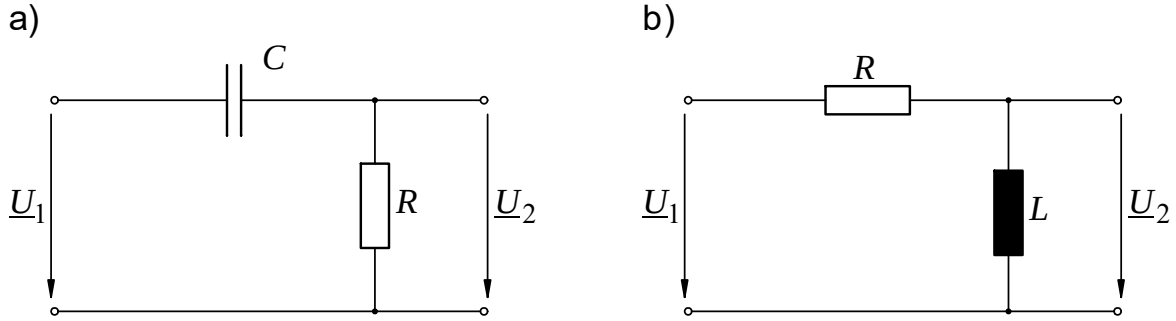
$$\tau = \frac{L}{R}$$

Bei ω = 0 s^{-1} ist das Spannungsverhältnis gleich eins. Bei $\omega \to \infty$ geht das Spannungsverhältnis gegen null.

Da ideale Spulen nicht realisierbar sind, wird für gewöhnlich Schaltung a) benutzt, um eine Tiefpassschaltung auszuführen.

5.6.5 Hochpass

Eine Hochpassschaltung ist ein komplexer Spannungsteiler mit einem Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsspannung von eins für hohe Frequenzen und einem Verhältnis von null für niedrige Frequenzen. Die folgende Abbildung zeigt wieder zwei mögliche Schaltungen.



Aus der Beziehung für den Spannungsteiler ergibt sich jeweils:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C \cdot R}{1 + j\omega C \cdot R} \qquad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega \cdot \frac{L}{R}}{1 + j\omega \cdot \frac{L}{R}}$$

Der Ausdruck τ wird auch hier als Zeitkonstante der Schaltung bezeichnet.

$$\tau = R \cdot C \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

Bei ω = 0 s^{-1} ist das Spannungsverhältnis gleich null. Um besser zu erkennen, wie sich die Schaltung bei hohen Frequenzen verhält, kann die Gleichung, die das Spannungsverhältnis beschreibt, umgeformt werden:

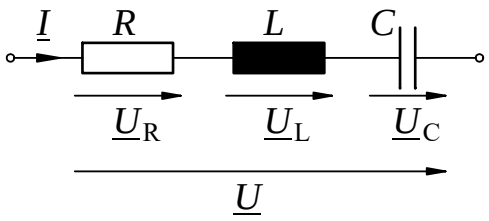
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega C \cdot R}{1 + j\omega C \cdot R} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C \cdot R}}$$

Nun ist es offensichtlich, dass sich das Spannungsverhältnis bei $\omega \to \infty$ gegen eins annähert.

Auch hier wird für gewöhnlich Schaltung a) benutzt, um eine Hochpassschaltung auszuführen.

5.6.6 Reihenschwingkreis

Ein Reihenschwingkreis ist eine Reihenschaltung eines Widerstands *R*, einer Induktivität *L* und einer Kapazität *C*.

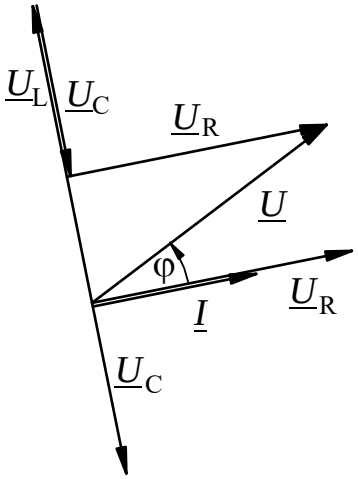


Die Gesamtspannung $\underline{U}$ ist die Summe der Spannungen über diese drei Komponenten:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$$

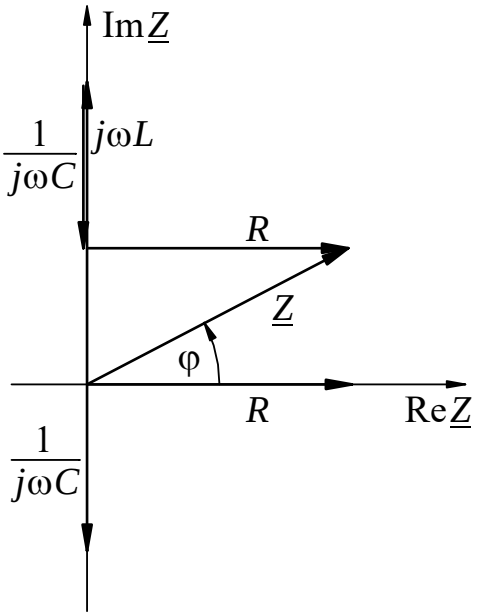
$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\left(\omega L \cdot \underline{I} - \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}\right)$$



Die Impedanz der Schaltung ergibt sich zu:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



Der Betrag der Impedanz ist gegeben durch:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Der Winkel φ kann berechnet werden über:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Resonanz

Bei Betrachtung der Gleichung für den Winkel φ ist ersichtlich, dass sowohl $\varphi < 0$ als auch $\varphi > 0$ möglich ist. Ebenso ist $\varphi = 0$ möglich. Dann tritt Resonanz ein, und der Betrag der beiden Reaktanzen ist gleich:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Die Kreisresonanzfrequenz ω_0 sowie die Resonanzfrequenz f_0 ergeben sich zu:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}} \qquad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}}$$

Die Resonanz ist eine Spannungsresonanz:

$$\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0$$
$$\underline{U}_L = -\underline{U}_C$$
$$U_L = U_C$$
$$\underline{U} = \underline{U}_R$$

Die Impedanz der Schaltung bei Resonanz ist $\underline{Z} = R$ und die sogenannte Kennimpedanz bei Resonanzfrequenz errechnet sich zu:

$$\boxed{Z_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Im Resonanzfall können die Spannungen an den Komponenten wie folgt berechnet werden:

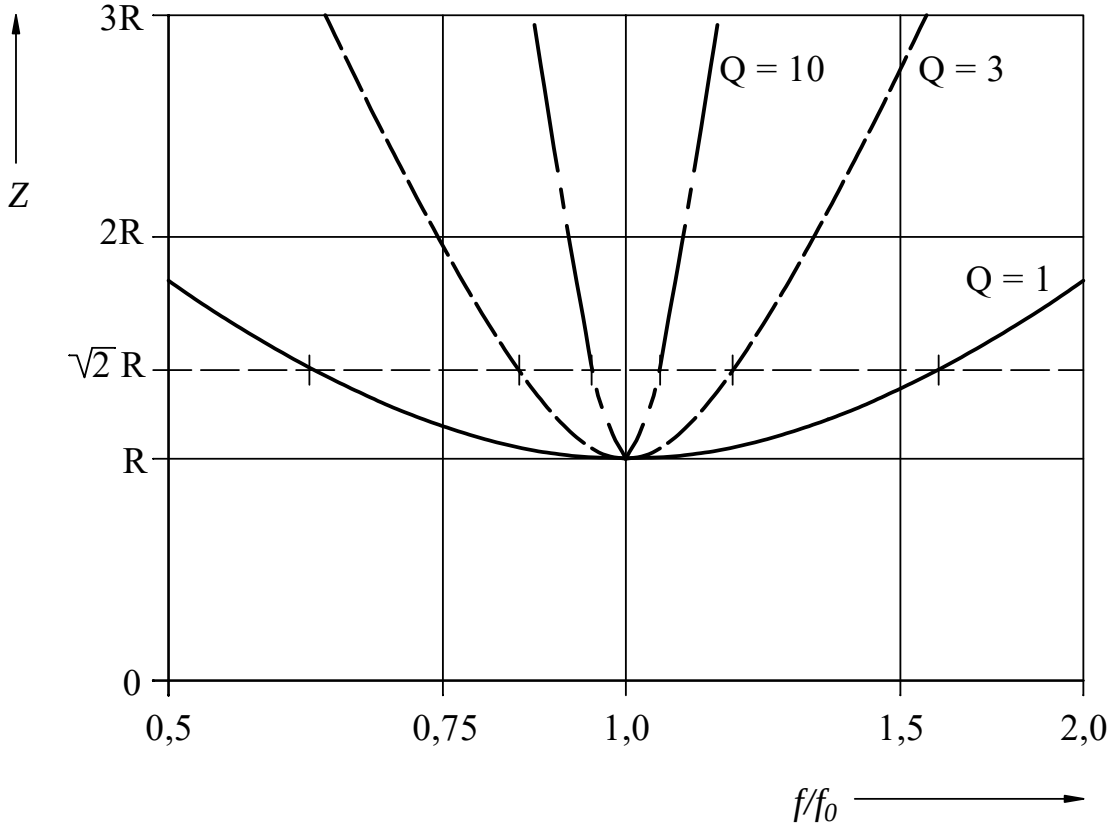
$$\underline{U}_R(\omega_0) = \underline{U} \qquad \underline{I}(\omega_0) = \frac{\underline{U}}{R}$$
$$\underline{U}_L = j\omega_0 L \cdot \underline{I}(\omega_0) = j\frac{\omega_0 L}{R} \cdot \underline{U} = j\frac{Z_0}{R} \cdot \underline{U}$$
$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \cdot \underline{I}(\omega_0) = -j\frac{1}{\omega_0 C \cdot R} \cdot \underline{U} = -j\frac{Z_0}{R} \cdot \underline{U}$$

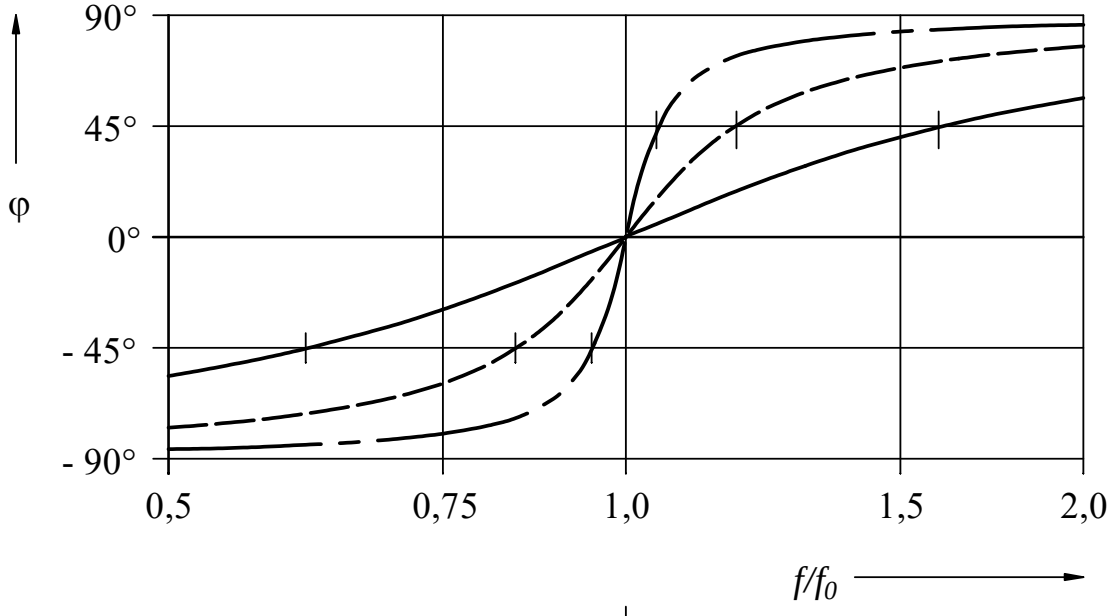
Gütefaktor

Die Resonanzschärfe kann durch den Gütefaktor oder auch Kreisgüte Q beschrieben werden:

$$Q = \frac{U_L(\omega_0)}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} \qquad Q = \frac{U_C(\omega_0)}{U} = \frac{1}{\omega_0 C \cdot R}$$
$$Q = \frac{Z_0}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Der Kehrwert des Gütefaktors wird als Verlustfaktor bezeichnet: $d = \frac{1}{Q}$





kapazitiv | induktiv

Der Gütefaktor kann ohne weiteres Werte von 10 oder 20 erreichen. Demzufolge können die Spannungen U_L und U_C bei Frequenzen nahe der Resonanzfrequenz wesentlich größer sein als die am Schwingkreis angelegte Spannung, und die Komponenten *L* und *C* müssen für diese Spannungen ausgelegt sein.

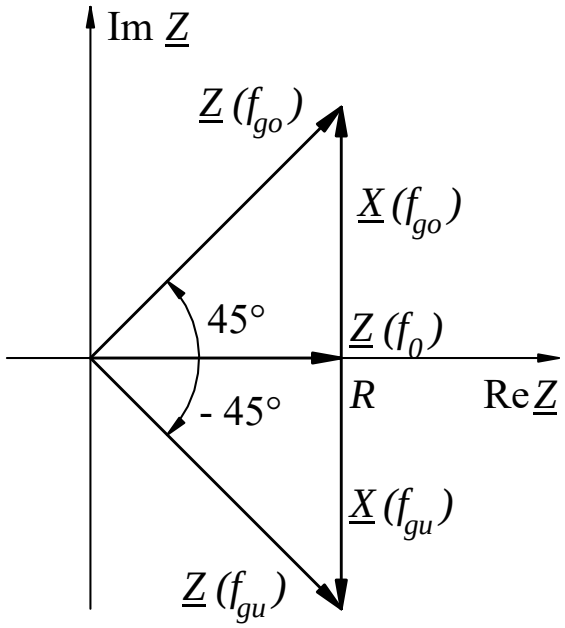
Die Abbildung auf der vorherigen Seite zeigt den Betrag und den Phasenwinkel eines Reihenschwingkreises als eine Funktion des Verhältnisses f/f_0 für verschiedene Werte des Gütefaktors. Es wird ersichtlich, dass der Betrag der Impedanz bei größeren Werten des Gütefaktors bei nur kleinen Änderungen der Frequenz stark steigt. Aus diesem Grund wird folglich der Gütefaktor auch als Resonanzschärfe bezeichnet.

Grenzfrequenzen

Der Reihenschwingkreis hat im Resonanzfall die kleinste Impedanz

$$Z(f_0) = R$$

welche für niedrigere oder höhere Frequenzen größer wird. Die Frequenzen, bei welchen die Impedanz um einen Faktor $\sqrt{2}$ größer als R ist, werden als Grenzfrequenz f_g bezeichnet. Die nächste Abbildung zeigt für ein Beispiel die entsprechenden Zeiger in einem Zeigerdiagramm.



Der Betrag von $\underline{Z}$ bei den Grenzfrequenzen ist:

$$Z(f_g) = \sqrt{2} \cdot R$$
$$\Rightarrow \quad X = \pm R$$

Der Phasenwinkel bei den Grenzfrequenzen beträgt ± 45° Deshalb werden die Grenzfrequenzen auch als 45°-Frequenzen bezeichnet.

Die Bandbreite Δf eines Resonanzkreises ist als die Differenz zwischen der oberen und unteren Grenzfrequenz definiert:

$$\Delta f = f_{go} - f_{gu}$$

Weitere Berechnungen:

$$\frac{X}{R} = +/-1$$
$$Q \cdot \left(\frac{f_g}{f_0} - \frac{f_0}{f_g} \right) = +/-1$$

$$\frac{f_g}{f_0} - \frac{f_0}{f_g} \mp \frac{1}{Q} = 0 \qquad \left| \times f_0 f_g \right.$$

$$f_g^{\,2} \mp \frac{f_0}{Q} \cdot f_g - f_0^{\,2} = 0$$

$$f_g = \pm \frac{f_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{f_0^{\,2}}{4 \cdot Q^2} + f_0^{\,2}}$$

obere Grenzfrequenz $\quad f_{go} = f_0 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \right)$

untere Grenzfrequenz $\quad f_{gu} = f_0 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \right)$

$$\Delta f = f_{go} - f_{gu}$$

$$\Delta f = f_0 \cdot \left[\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \right) - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \right) \right]$$

$$\Delta f = f_0 \cdot \frac{1}{Q}$$

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f}}$$

Mit der Bandbreite kann also auch der Gütefaktor beschrieben werden. Diese Beziehung macht noch einmal deutlich, warum der Gütefaktor auch Resonanzschärfe genannt wird.

$$f_{go} \cdot f_{gu} = f_0 \cdot \left(W + \frac{1}{2Q} \right) \cdot f_0 \cdot \left(W - \frac{1}{2Q} \right)$$

mit $\quad W = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$

$$f_{go} \cdot f_{gu} = f_0^{\,2} \cdot \left(W^2 - \frac{1}{4Q^2} \right)$$

$$f_{go} \cdot f_{gu} = f_0^{\,2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4Q^2} - \frac{1}{4Q^2} \right)$$

$$\boxed{f_0 = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}}}$$

Die Resonanzfrequenz ist das geometrische Mittel der beiden Grenzfrequenzen:

<u>Gipfelfrequenzen</u>

Nachstehend ist nochmals ein Reihenschwingkreis dargestellt, der durch eine konstante Spannung *U* angeregt wird. Zusätzlich sind Diagramme dargestellt, welche Strom, Spannung und Impedanz für die drei Bauelemente als eine Funktion der Frequenz zeigen.

Es gilt für die Impedanz und deren Betrag:

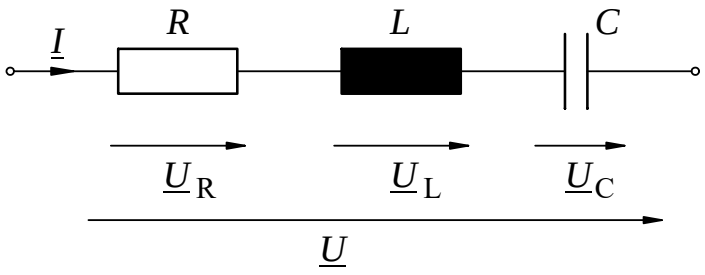
$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R \cdot \left[1 + j\left(\frac{\omega_0 L}{R} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 C \cdot R} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = R \cdot \left[1 + jQ \cdot \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]$$

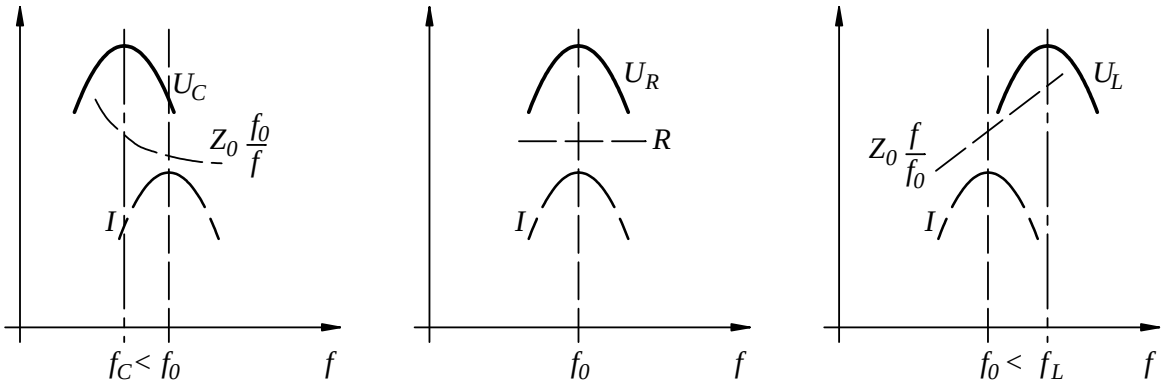
$$Z = R \cdot \sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}$$

Der Betrag des Stromes ergibt sich damit zu:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R \cdot \sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}$$

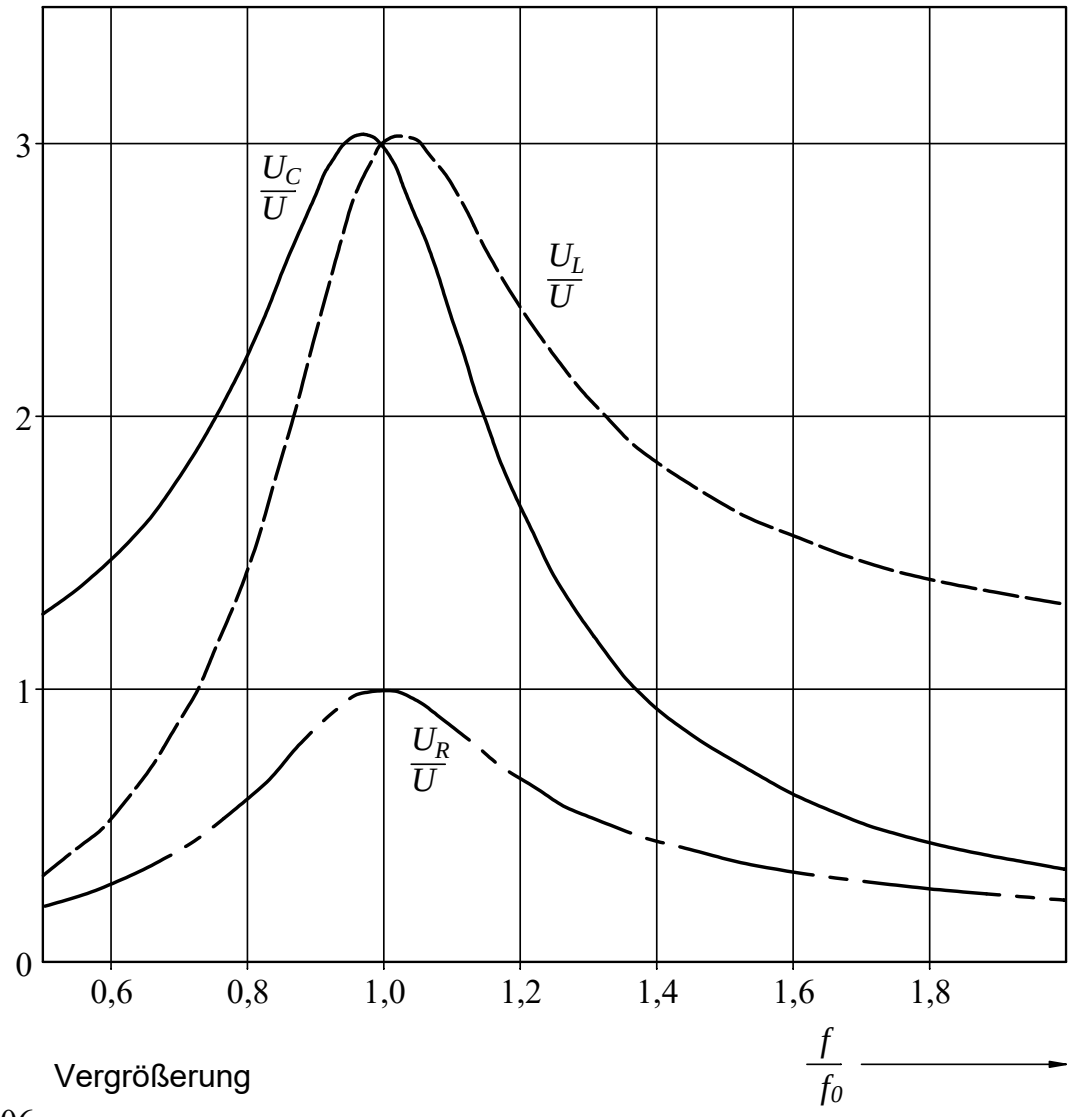
Der Strom hat sein Maximum bei $f = f_0$, weil die Impedanz $Z(f)$ dort ihr Minimum hat.



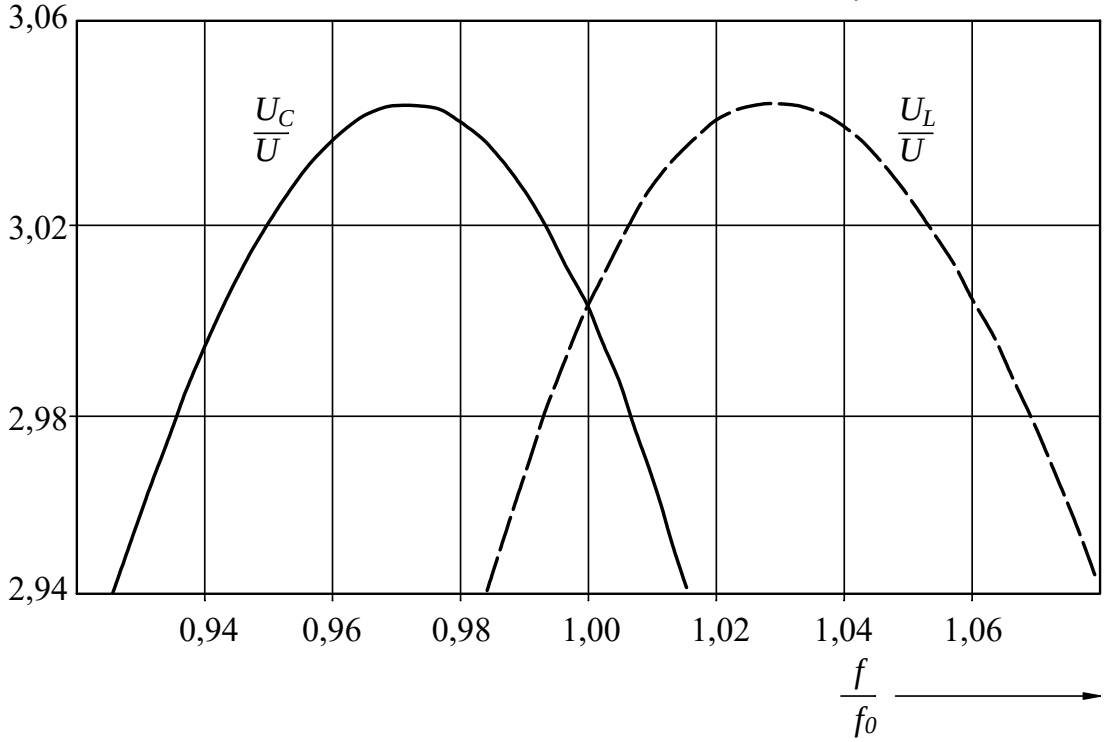


Die Maxima der Spannungen $U_L(f)$ und $U_C(f)$ sind wegen der Frequenzabhängigkeit von Z gegenüber dem Strommaximum verschoben. Die Frequenzen, bei denen die Spannungsmaxima auftreten, heißen Gipfelfrequenzen f_c und f_L. Das Spannungsmaximum für $U_R(f)$ tritt natürlich bei der Resonanzfrequenz f_0 auf.

In der Abbildung auf der nächsten Seite werden die Verhältnisse nochmals für einen Reihenschwingkreis mit einem Gütefaktor von Q = 3 dargestellt, der durch eine konstante Spannung angeregt wird.

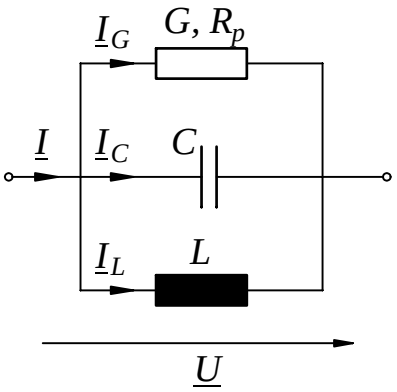


Vergrößerung



5.6.7 Parallelschwingkreis

Ein Parallelschwingkreis ist eine Parallelschaltung eines Widerstands *R*, einer Induktivität *L* und einer Kapazität *C*.

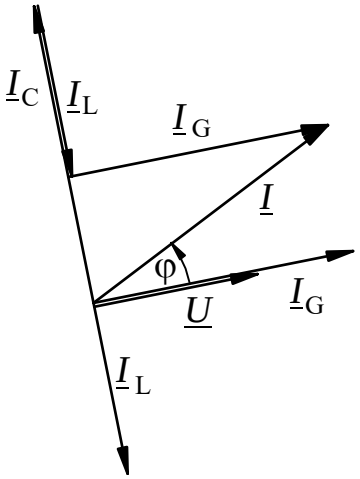


Der Gesamtstrom *I* ist die Summe der Ströme durch diese drei Komponenten:

$$\underline{I} = \underline{I}_G + \underline{I}_C + \underline{I}_L$$

$$\underline{I} = G \cdot \underline{U} + j\omega C \cdot \underline{U} + \frac{1}{j\omega L} \cdot \underline{U}$$

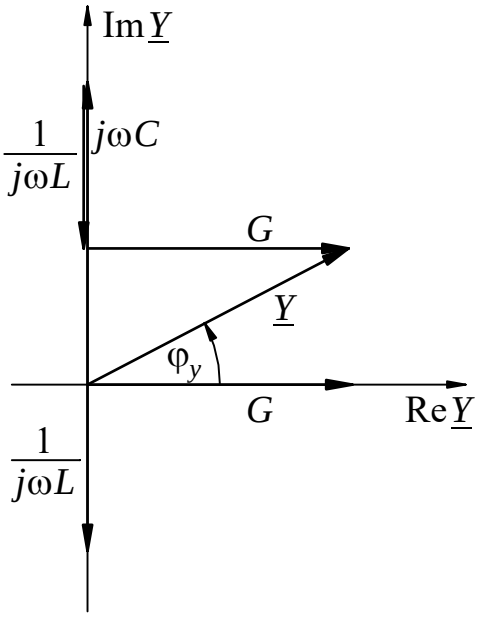
$$\underline{I} = \left(G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \cdot \underline{U}$$



Die Admittanz der Schaltung ergibt sich zu:

$$\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$



Der Betrag der Admittanz ist gegeben durch:

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}$$

Der Winkel φ_y kann berechnet werden über:

$$\varphi_y = \arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \right)$$

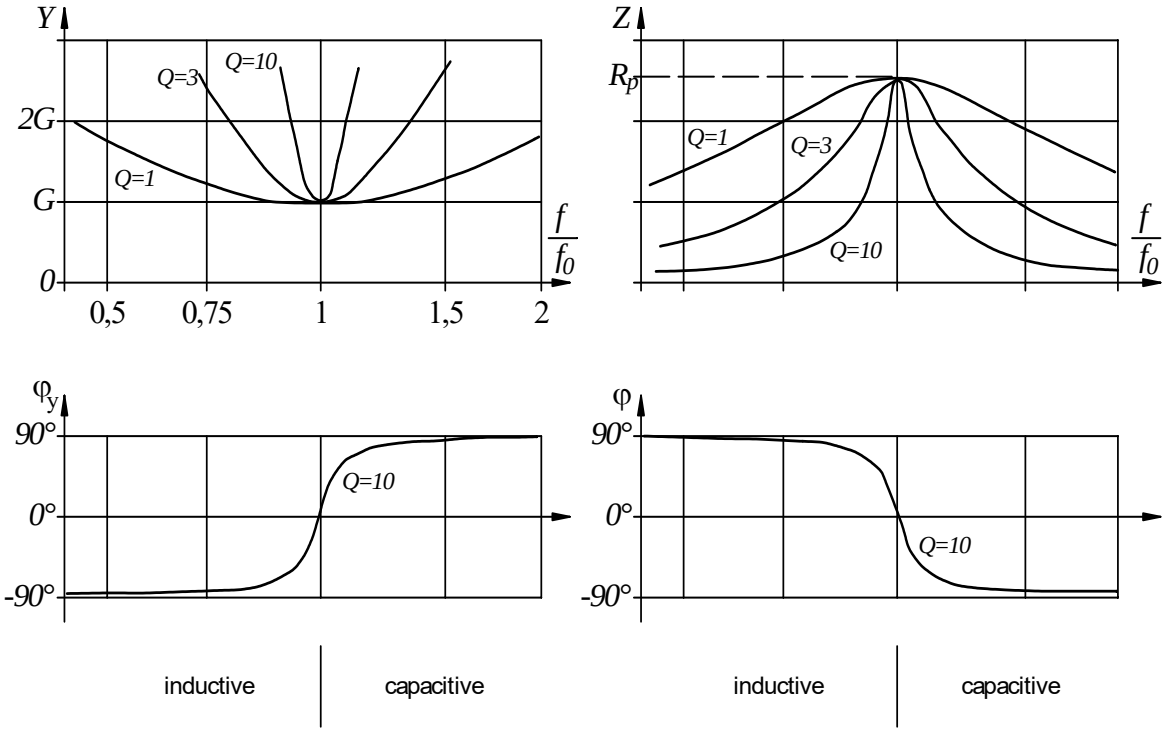
Die folgende Tabelle zeigt die Dualitäten zwischen Reihen- und Parallelschwingkreis:

	Reihenschwingkreis	Parallelschwingkreis
Kennkreisfrequenz	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}$
Kennimpedanz	$Z_0 = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Z_0 = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}$
Kennadmittanz	$Y_0 = \omega_0 C = \sqrt{\frac{C}{L}}$	$Y_0 = \omega_0 C = \sqrt{\frac{C}{L}}$
Gütefaktor	$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{Z_0}{R}$	$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{Y_0}{G} = \frac{R_p}{Z_0}$

Aufgrund der oben verdeutlichten Dualitäten beschreiben Betrag und Phasenwinkel der Admittanz *Y* als Funktion des Frequenzverhältnisses f/f_0 Kurven, welche denen von *Z* für den Reihenschwingkreis ähnlich sind. Betrags- und Phasengang für die Impedanz *Z* können hieraus abgeleitet werden bei Verwendung von:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \qquad Z = \frac{1}{Y} \qquad \varphi = -\varphi_y$$

Nachstehend sind Betrags- und Phasengang der Admittanz und der Impedanz eines Parallelschwingkreises im Bereich seiner Resonanzfrequenz dargestellt.



5.7 Leistung im Wechselstromkreis

5.7.1 Augenblicksleistung

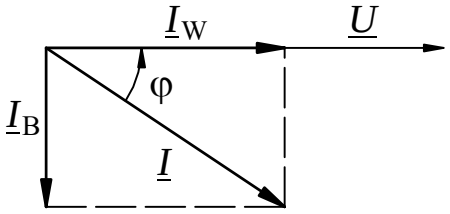
Die Augenblicksleistung ist das Produkt der Augenblicksspannung und des Augenblicksstromes:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Abhängig von den Vorzeichen von Spannung und Strom kann die Augenblicksleistung ein negatives Vorzeichen haben, was bedeuten würde, dass der Energiefluss seine Richtung ändert.

Wir betrachten zwei sinusförmige Wechselgrößen *u* und *i*, welche um den Phasenwinkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ gegeneinander phasenverschoben sind. Die zweckmäßige Auslegung des zeitlichen Nullpunkts sei so gewählt, dass $\varphi_u = 0$ wird.

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$
$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$
$$i(t) = \hat{i} \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\omega t) + \hat{i} \cdot \sin\varphi \cdot \left[-\cos(\omega t)\right]$$
$$i(t) = \hat{i}_W \cdot \sin(\omega t) + \hat{i}_B \cdot \left[-\cos(\omega t)\right]$$



Komplexe Darstellung:

$$\underline{I} = \underline{I}_W + \underline{I}_B$$

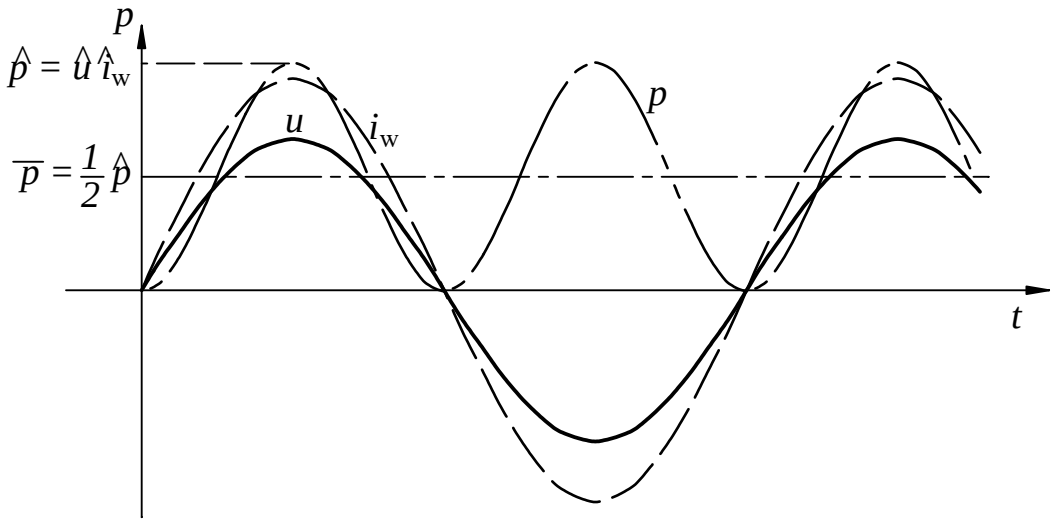
$I_W = I \cdot \cos\varphi$ Wirkstrom

$I_B = I \cdot \sin\varphi$ Blindstrom

5.7.2 Wirkleistung

Die Wirkleistung ist der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung. Diese Berechnung dieses Mittelwertes berücksichtigt nur den Wirkstrom i_W (dass dies berechtigt ist, wird in Abschnitt 5.7.4 gezeigt).

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot i(t) dt$$



$$P = \overline{p} = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}_W}{2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}_W}{\sqrt{2}} = U \cdot I_W$$

da $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ (siehe 5.1.4)

Wirkleistung: $\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos\varphi}$ $\cos\varphi$: Leistungsfaktor

Wirkleistung ist Leistung im physikalischen Sinne = die mittlere, pro Zeit geleistete Arbeit

Einheit der Wirkleistung: [P] = 1 W (Watt)

An Wirkwiderständen tritt nur Wirkleistung auf!

5.7.3 Scheinleistung

Die Scheinleistung (auch: komplexe Leistung) ist das Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung.

Scheinleistung: $\boxed{S = U \cdot I}$

Allgemeine Definition des Leistungsfaktors: $\lambda = \frac{P}{S}$

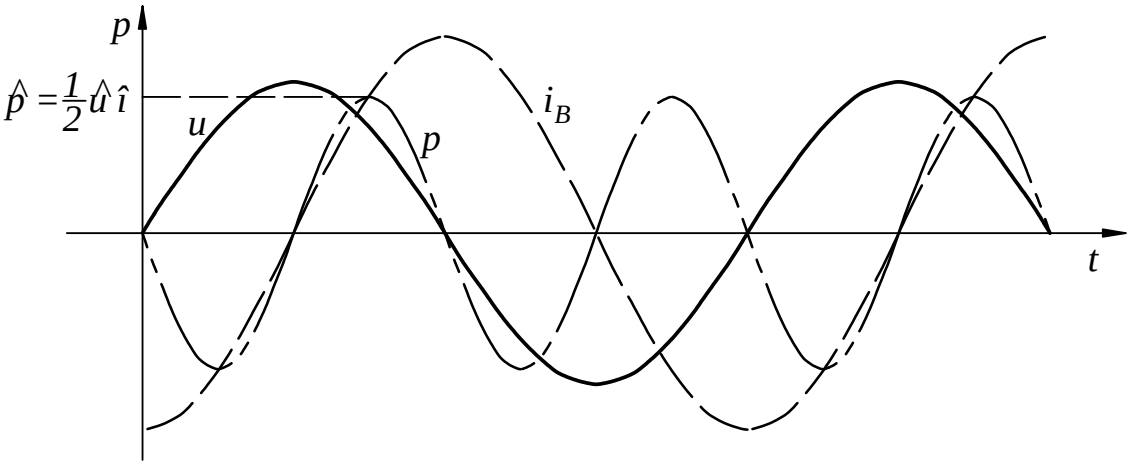
Leistungsfaktor für sinusförmige Spannungen und Ströme: $\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi$

Die Scheinleistung ist eine Rechengröße ohne unmittelbare physikalische Bedeutung.

Einheit der Scheinleistung: [S] = 1 VA (Volt-Ampere)

5.7.4 Blindleistung

Durch das Zusammenwirken von Blindstrom und Spannung kommt ebenfalls ein Energiefluss zustande → Pendelleistung



Energie wird hin- und hergeschoben (z.B. zwischen Quelle und Verbraucher) aber nicht in eine andere Energieform, wie z.B. mechanische Arbeit oder Wärme, umge-wandelt (nicht verbraucht).

Der arithmetische Mittelwert dieser Augenblicksleistung ist null. Bei der Wirkleistung ist der Blindstrom i_B daher zu Recht unberücksichtigt geblieben.

Definition: $Q = U \cdot I_B$

Blindleistung: $\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi}$

Blindleistung ist keine Leistung im physikalischen Sinne.

Einheit der Blindleistung:[Q] = 1 var (Volt-Ampere reaktiv)

An reinen Reaktanzen (L, C) tritt nur Blindleistung auf!

5.7.5 Komplexe Leistungsberechnung

Bislang waren die folgenden Beziehungen zwischen *S, P* und *Q* zu erkennen:

$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos \varphi}$ $\qquad$ $\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

$$\tan\varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi} \qquad \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right)}$$

Diese Zusammenhänge sind von gleicher Art wie jene zwischen *Z, R* und *X*. Also ist die Definition eines komplexen Leistungszeigers naheliegend:

$$\underline{S} = P + jQ$$

Bei der Ermittlung von *P* und Q kommt es auf die Beträge *I* und *U* an, sowie auf deren Phasendifferenz $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

In einem ersten Ansatz erscheint die folgende Definition einer komplexen Scheinleistung sinnvoll zu sein:

$$\underline{S}_{\sim} = \underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{j\varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_i)}$$

Das Ergebnis dieses Ansatzes beinhaltet aber die Summe der Phasenwinkel und nicht deren Differenz. Aus diesem Grund wird die komplexe Leistung als das Produkt der komplexen Spannung und des konjugiert komplexen Stromes definiert:

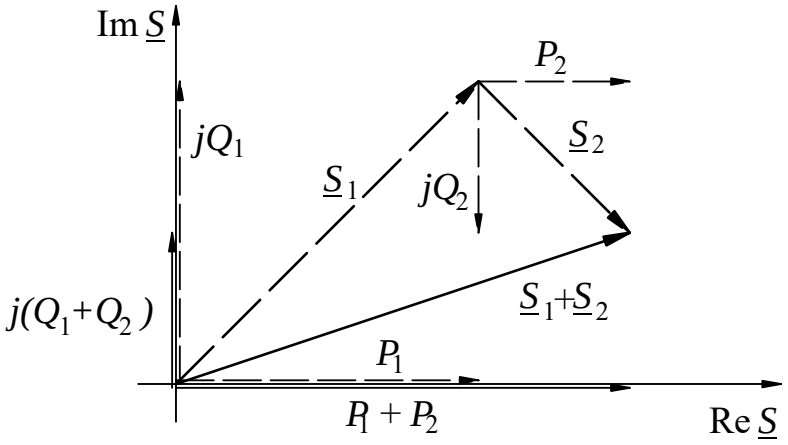
$$\boxed{\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = S \cdot e^{j\varphi}}$$

$$\underline{S} = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

Die Komponenten dieses komplexen Zeigers sind

$$P = \mathrm{Re}\underline{S} = S \cdot \cos\varphi = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$
$$Q = \mathrm{Im}\underline{S} = S \cdot \sin\varphi = U \cdot I \cdot \sin\varphi$$

Die Addition komplexer Leistungen erfolgt geometrisch:



$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (P_1 + jQ_1) + (P_2 + jQ_2) = (P_1 + P_2) + j(Q_1 + Q_2)$$

Die Scheinleistung oder komplexe Leistung an einer Impedanz kann wie folgt berechnet werden:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = \left(Z \cdot I\right) \cdot I \cdot e^{j\varphi} = I^2 \cdot Z \cdot e^{j\varphi}$$

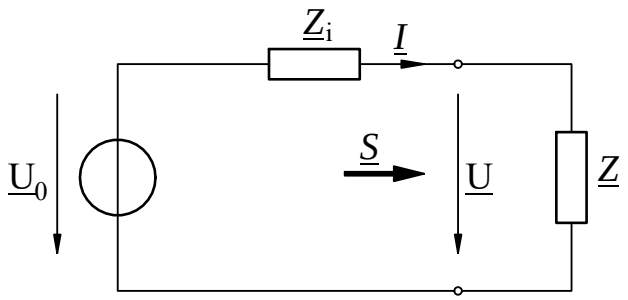
$$\underline{S} = \underline{Z} \cdot I^2$$

Wenn anstelle des Stromes die Spannung verwendet wird, erhält man:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot \left(\frac{U}{Z}\right) \cdot e^{j\varphi} = \frac{U^2}{Z \cdot e^{-j\varphi}}$$

$$\underline{S} = \frac{U^2}{\underline{Z}^{*}} = \underline{Y}^{*} \cdot U^2$$

Komplexe Leistung an einer Impedanz:



$$\underline{S} = \left(R + jX\right) \cdot I^2$$

$$P = \mathrm{Re}\underline{S} = R \cdot I^2$$

$$Q = \mathrm{Im}\underline{S} = X \cdot I^2$$

bei ohmisch-induktiver Last:

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

$$\underline{S} = \left(R + j\omega L\right) \cdot I^2$$

$$P = R \cdot I^2$$

$$Q = \omega L \cdot I^2 \quad \text{positiv!}$$

bei ohmisch-kapazitiver Last:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

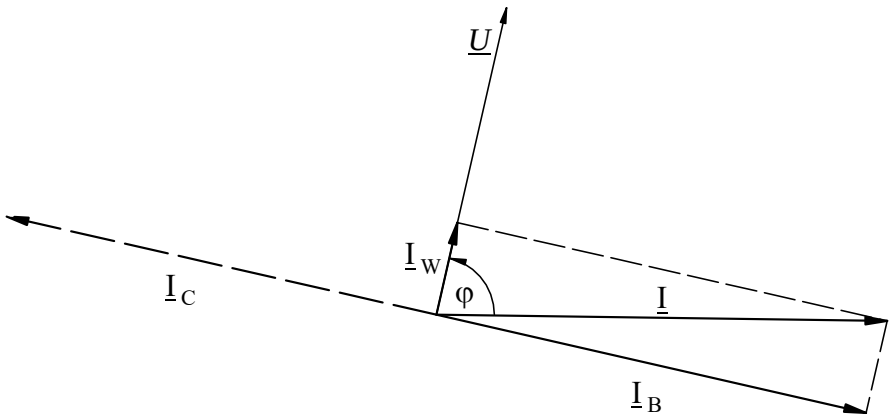
$$\underline{S} = \left(R + j\frac{-1}{\omega C}\right) \cdot I^2$$

$$P = R \cdot I^2$$

$$Q = \frac{-1}{\omega C} \cdot I^2 \quad \text{negativ}$$

5.7.6 Blindleistungskompensation

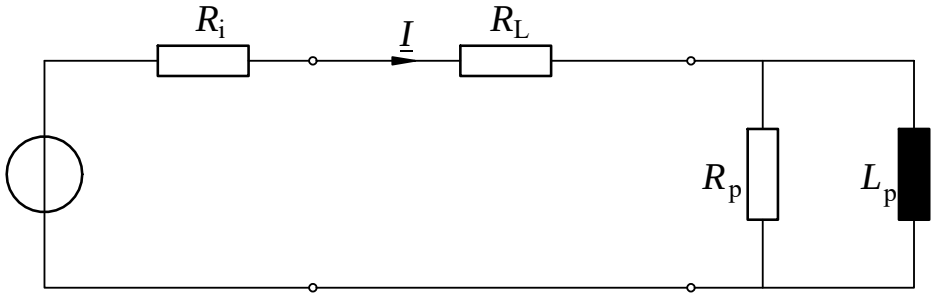
Die folgende Abbildung zeigt das Strom-Spannungs-Zeigerdiagramm eines Verbrauchers mit großer Induktivität.



Nur ein kleiner Anteil $I_W = I \cdot \cos\varphi$ des Gesamtstromes *I* ist für die Wirkleistung von Bedeutung:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\,\varphi$$

Nur dieser Anteil kann eine Arbeit leisten (und soll dem Energieversorger bezahlt werden). Dennoch muss der gesamte Strom I über die Leitungen des Energieversorgers zum Verbraucher herangeführt werden. Die folgende Abbildung verdeutlicht diese Situation in einer äquivalenten Schaltung; es enthält auch den Leiterwiderstand R_L.



Verluste auf der Leitung: $P_V = R_L \cdot I^2$

Diese Leitungsverluste können verringert werden, wenn der reaktive Teil des Gesamtstromes, $I_B = I \cdot \sin\varphi$, welcher nur die reaktive Leistung $Q = U \cdot I \cdot \sin\,\varphi$ im Verbraucher hervorruft, verringert werden kann.

Dies gelingt durch das Hinzufügen eines parallel zum Verbraucher geschalteten Kondensators, welcher einen Strom $\underline{I}_C = -\underline{I}_B$ aufnimmt.

Der Strom I_C muss der Spannung um 90° vorauseilen → Kapazität

Der Strom I_C muss zum Strom *I* addiert werden → Parallelschaltung

Durch Parallelschalten einer Kapazität soll erreicht werden, dass die Blindleistung der Gesamtanordnung null wird.

$$Q + Q_C = 0$$

$$Q_C = -Q$$

$$\mathrm{Im}\left\{\underline{Y}_C^{*} \cdot U^2\right\} = -Q$$

$$-\omega C \cdot U^2 = -Q$$

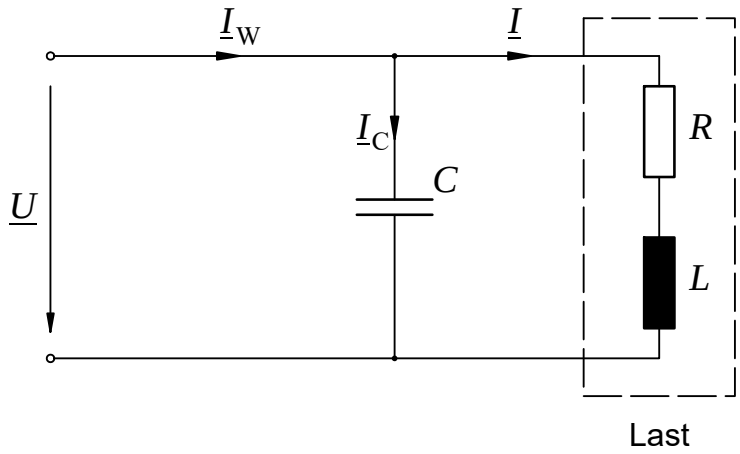
ohne komplexe Leistungsdarstellung:

$$Q_C = X_C \cdot I_C{}^2 = -\frac{1}{\omega C} \cdot I_C{}^2$$

$$I_C = \omega C \cdot U$$

$$Q_C = -\omega C \cdot U^2$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{\omega \cdot U^2}}$$



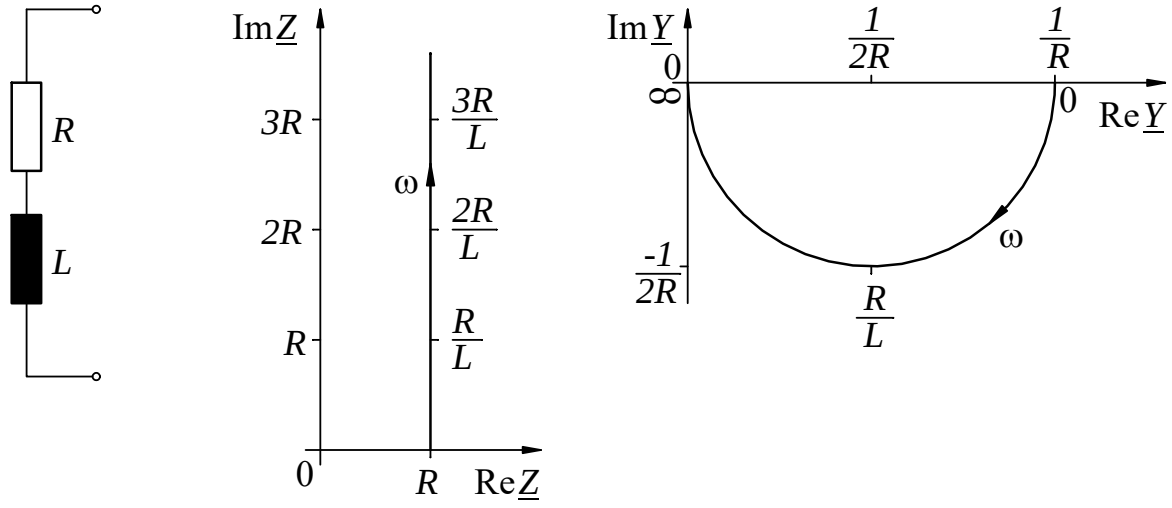
6. Ortskurven

Ein Diagramm, welches eine komplexe Größe als Funktion einer Variablen in der Gauß'schen Ebene darstellt, wird Ortskurve genannt. In der Elektrotechnik ist diese Variable nahezu immer die Frequenz *f* oder die Kreisfrequenz ω.

6.1 Ortskurven von RL - und RC - Schaltungen

6.1.1 RL - Reihenschaltung

Ortskurven von Impedanz und Admittanz einer RL – Reihenschaltung:



Die Impedanz der Schaltung ergibt sich zu:

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Die Admittanz ist der Kehrwert der Impedanz:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi}$$

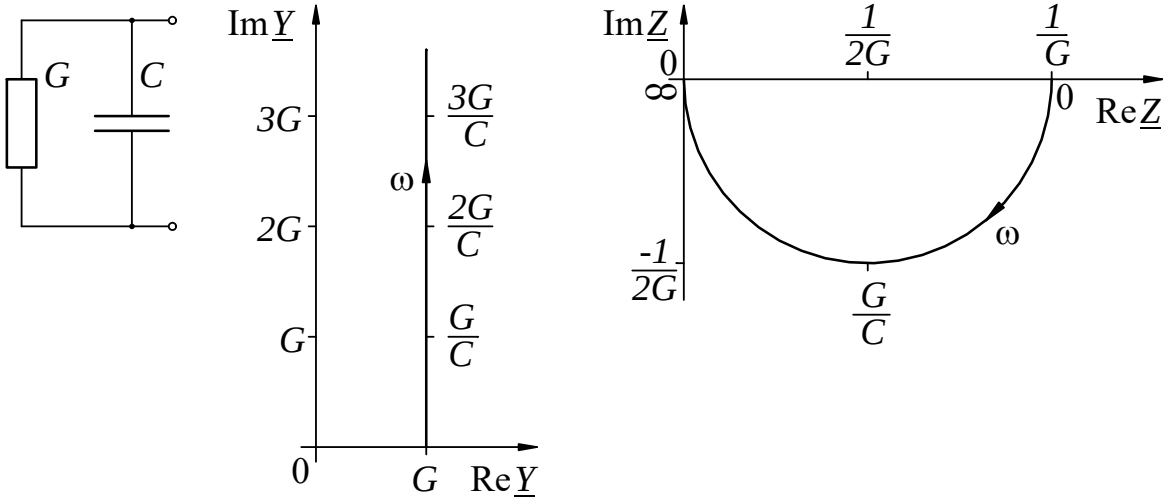
Bei einem Zeiger kann diese Umkehrung durch die Verwendung vom Kehrwert des Betrages und Vorzeichenänderung des Winkels φ erfolgen. Dies hat einen Halbkreis als Ortskurve der Admittanz zur Folge.

Die folgende Tabelle listet Werte von *Z* und φ, *Y* und φ_Y für einige charakteristische Werte von ω auf.

$\omega = 0$	$Z = R$	$\varphi = 0°$	$Y = \frac{1}{R}$	$\varphi_y = 0°$
$\omega = \frac{R}{L}$	$Z = \sqrt{2} \cdot R$	$\varphi = 45°$	$Y = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot R}$	$\varphi_y = -45°$
$\omega \to \infty$	$Z \to \infty$	$\varphi \to 90°$	$Y = 0$	$\varphi_y \to -90°$

6.1.2 GC - Parallelschaltung

Ortskurven von Admittanz und Impedanz einer RC – Parallelschaltung. Zur Vereinfachung der Darstellung wird anstelle des Ohm‘schen Widerstandes *R* sein Leitwert *G* verwendet:



Die Admittanz der Schaltung ergibt sich zu:

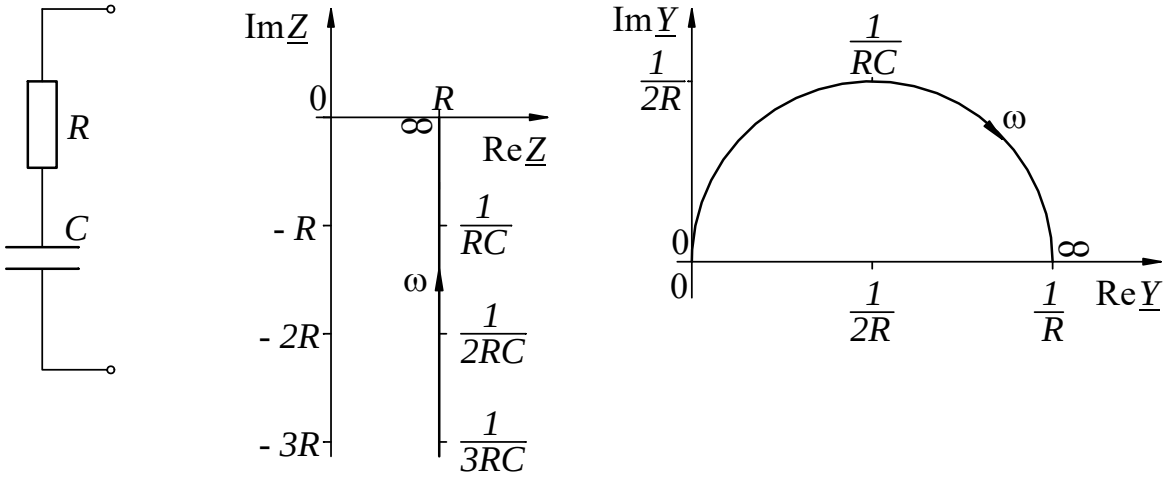
$$\underline{Y} = G + j\omega C$$

Die folgende Tabelle zeigt die Dualitäten von der RL - Reihenschaltung und der GC - Parallelschaltung:

Reihenschaltung	Parallelschaltung
R	*G*
L	*C*
$\underline{Z}$	$\underline{Y}$

6.1.3 RC – Reihenschaltung

Ortskurven von Impedanz und Admittanz einer RC – Reihenschaltung:



Die Impedanz der Schaltung ergibt sich zu:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Die Admittanz ist der Kehrwert der Impedanz:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi}$$

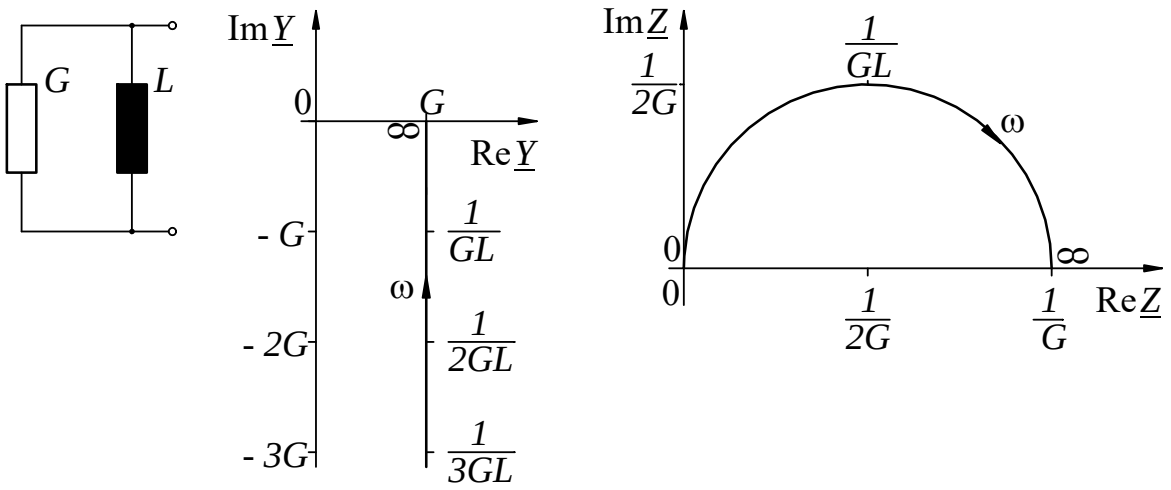
Bei einem Zeiger kann diese Umkehrung durch die Verwendung vom Kehrwert des Betrages und Vorzeichenänderung des Winkels φ erfolgen. Dies hat einen Halbkreis als Ortskurve der Admittanz zur Folge. Man beachte, dass nun gegenüber der RL – Reihenschaltung (6.1.1) jeweils die Vorzeichen der Imaginärteile beider Ortskurven vertauscht sind.

Die folgende Tabelle listet Werte von Z und φ, Y und φ_y für einige charakteristische Werte von ω auf.

$\omega = 0$	$Z \to \infty$	$\varphi \to -90°$	$Y = 0$	$\varphi_y \to 90°$
$\omega = \frac{1}{RC}$	$Z = \sqrt{2} \cdot R$	$\varphi = -45°$	$Y = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot R}$	$\varphi_y = 45°$
$\omega \to \infty$	$Z = R$	$\varphi = 0°$	$Y = \frac{1}{R}$	$\varphi_y = 0°$

6.1.4 GL – Parallelschaltung

Ortskurven von Admittanz und Impedanz einer GL – Parallelschaltung:



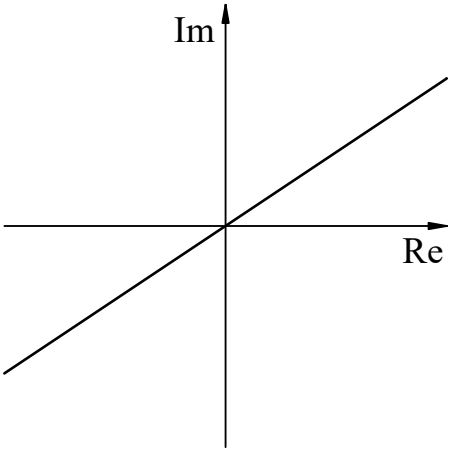
Die Admittanz der Schaltung ergibt sich zu:

$$\underline{Y} = G + \frac{1}{j\omega L} = G - j\frac{1}{\omega L}$$

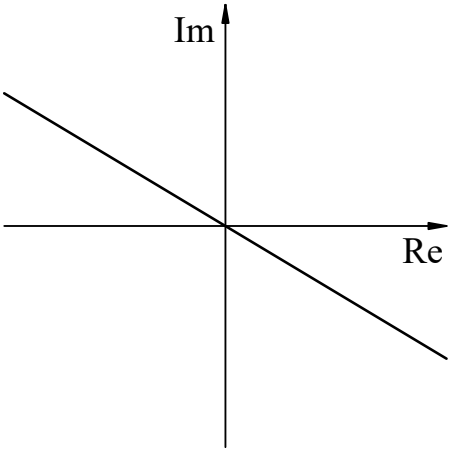
Die folgende Tabelle zeigt die Dualitäten von der RC - Reihenschaltung und der GL - Parallelschaltung:

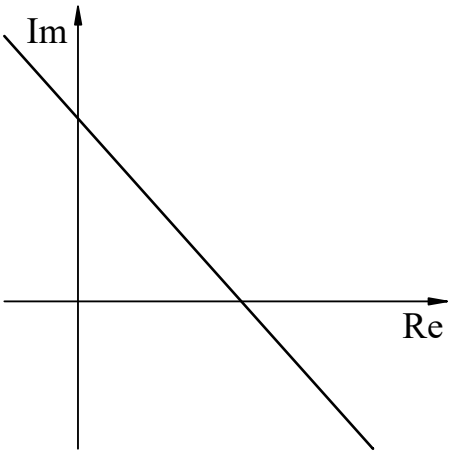
Reihenschaltung	Parallelschaltung
R	G
C	L
$\underline{Z}$	$\underline{Y}$

6.2 Inversion von Ortskurven

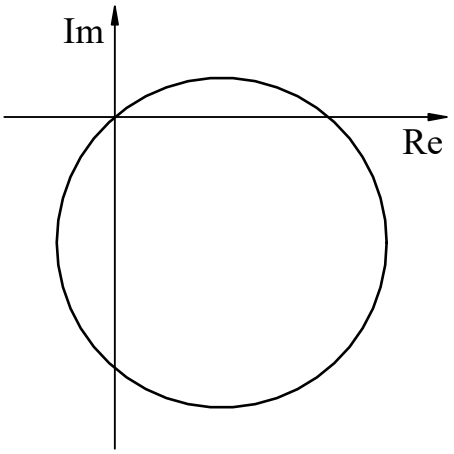


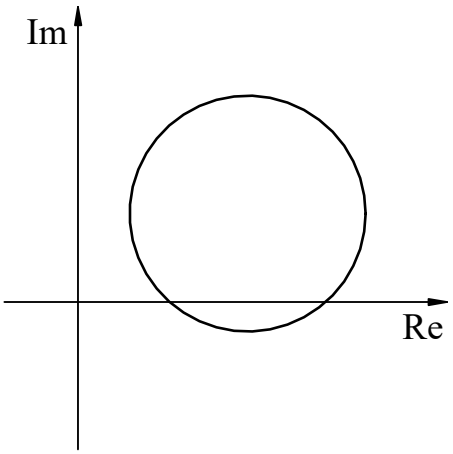
Gerade durch den Ursprung ⟷ Gerade durch den Ursprung



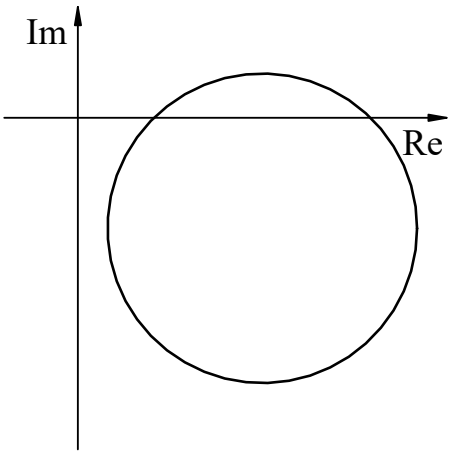


Gerade nicht durch den Ursprung ⟷ Kreis durch den Ursprung





Kreis nicht durch den Ursprung ⟷ Kreis nicht durch den Ursprung

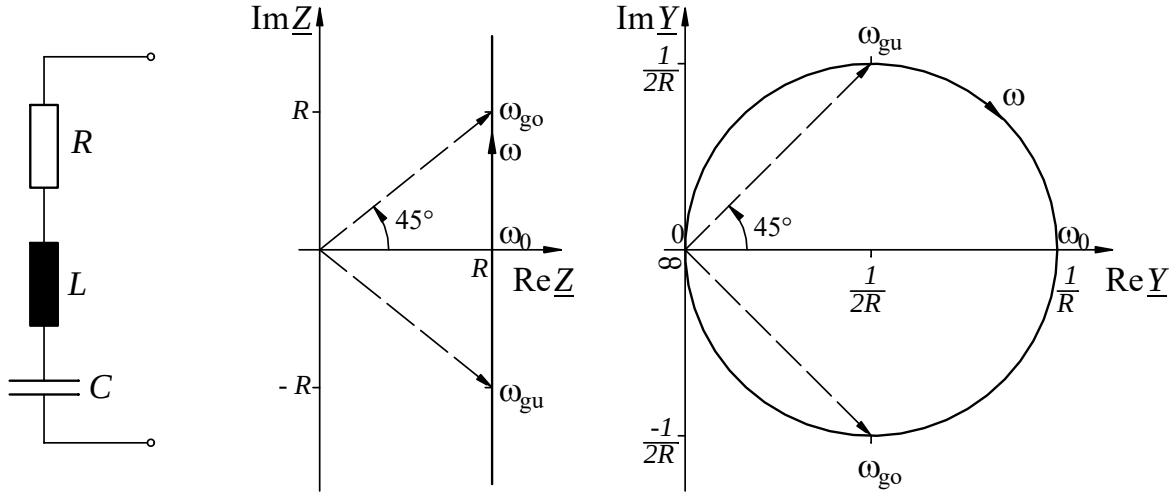


Einige gebräuchliche Regeln für die Inversion von Ortskurven

6.3 Ortskurven von Schwingkreisen

6.3.1 Reihenschwingkreis

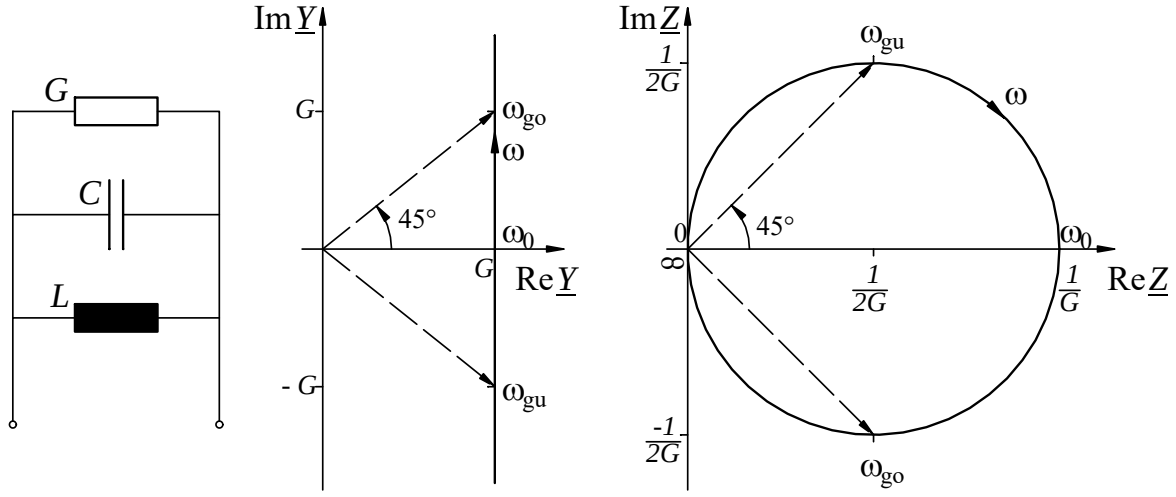
Ortskurven von Impedanz und Admittanz eines Reihenschwingkreises:



$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

6.3.2 Parallelschwingkreis

Ortskurven von Impedanz und Admittanz eines Parallelschwingkreises:

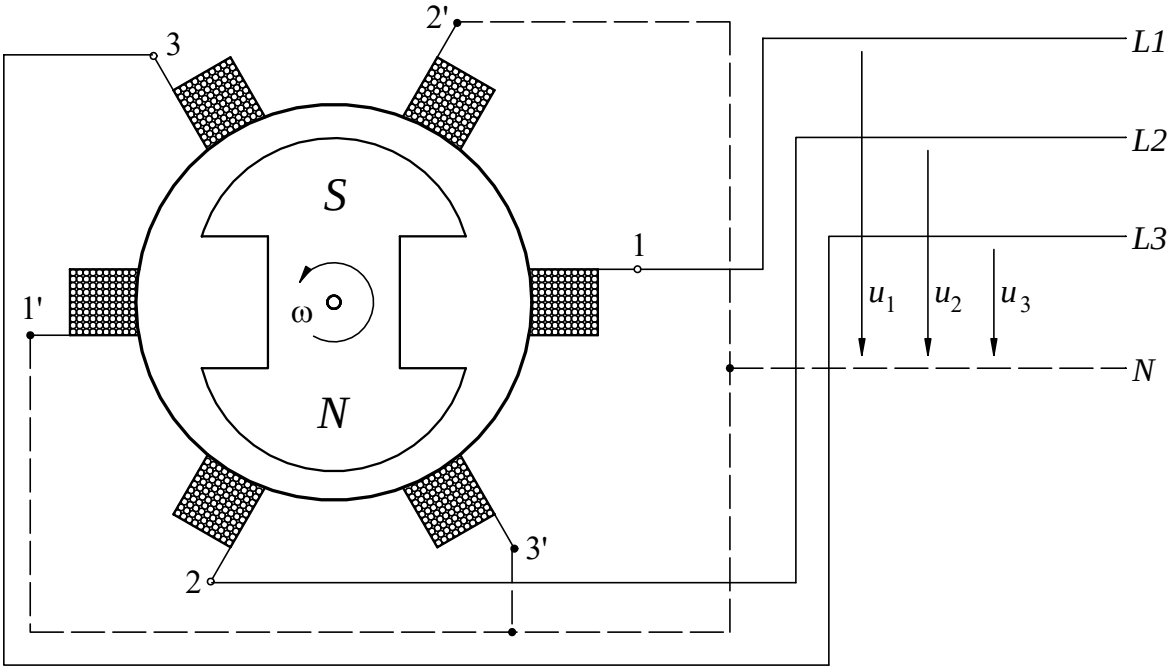


$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

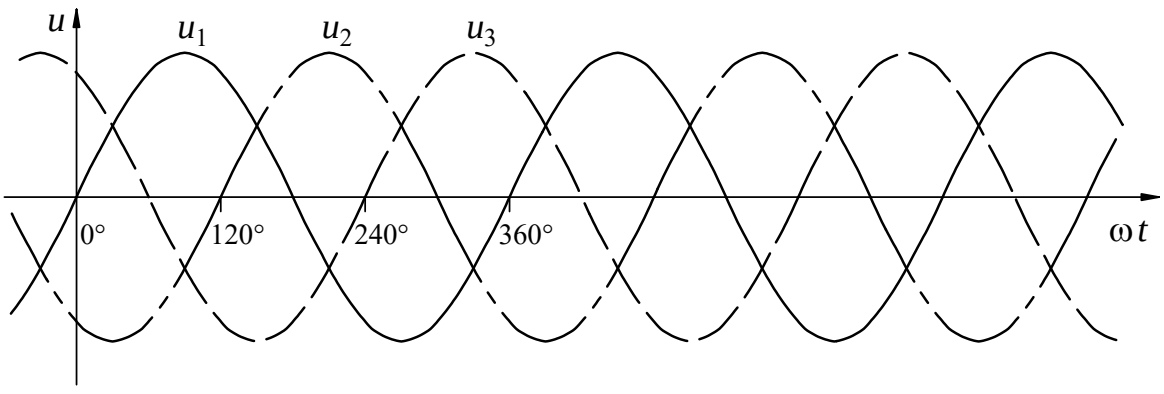
7. Dreiphasensysteme

7.1 Erzeugung von Dreiphasensystemen

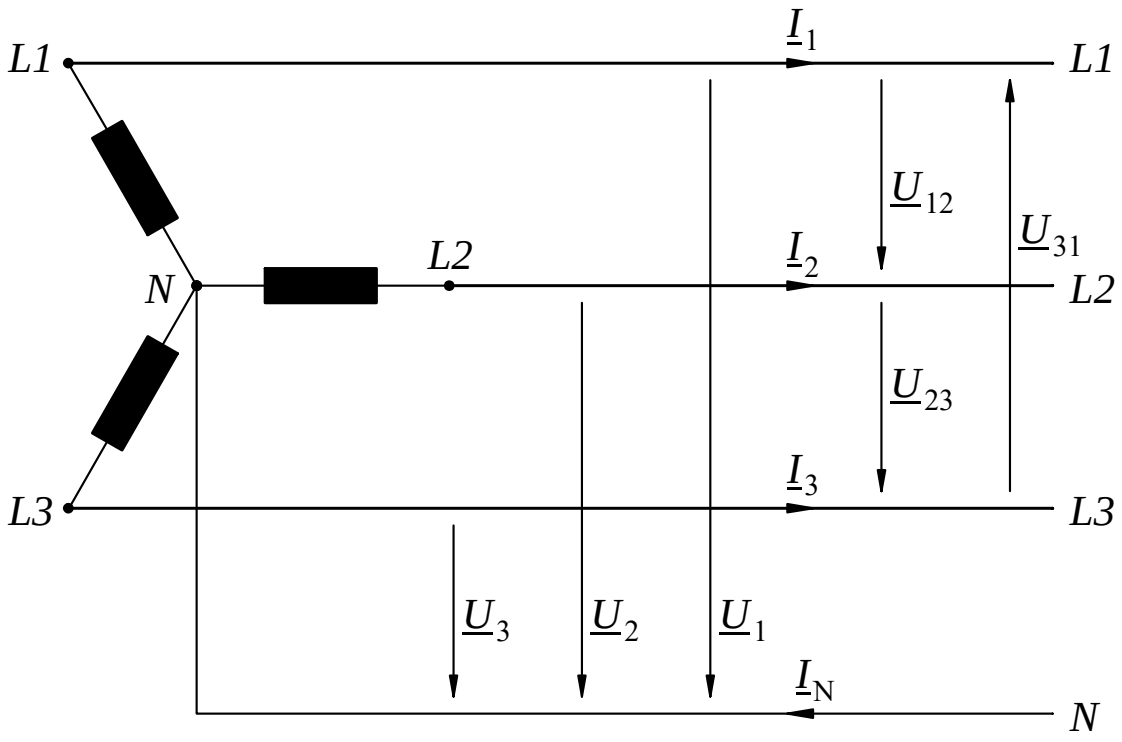
Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Generators mit einem Stator, welcher drei gleiche Wicklungen hat. Diese Wicklungen sind um jeweils 120° zueinander versetzt. Ein Ende einer jeden Wicklung ist gemeinsam zum Neutralleiter (*N*) verbunden. Die anderen drei Enden sind die so genannten Phasenleiter *L1*, *L2* und *L3*.



Der Rotor ist ein Permanentmagnet, dessen Rotation drei gleiche Spannungen induziert, welche gegeneinander um den Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120°$ phasenverschoben sind. Das folgende Zeitlinienbild zeigt die in den drei Wicklungen des Generators induzierten Spannungen:



In der nächsten Abbildung ist das Ersatzschaltbild des Generators mit den Wicklungen, welche durch deren Induktivitäten repräsentiert sind, dargestellt.



Damit können nun auch die Spannungen gut erläutert werden. Die Spannungen zwischen den Phasenleitern und dem Neutralleiter, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$, werden als Sternspannungen bezeichnet, während die Spannung zwischen den Phasenleitern, $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$, als Dreieckspannungen bezeichnet werden.

Bei Verwendung der Maschenregel erhält man:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$$
$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$$
$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$$

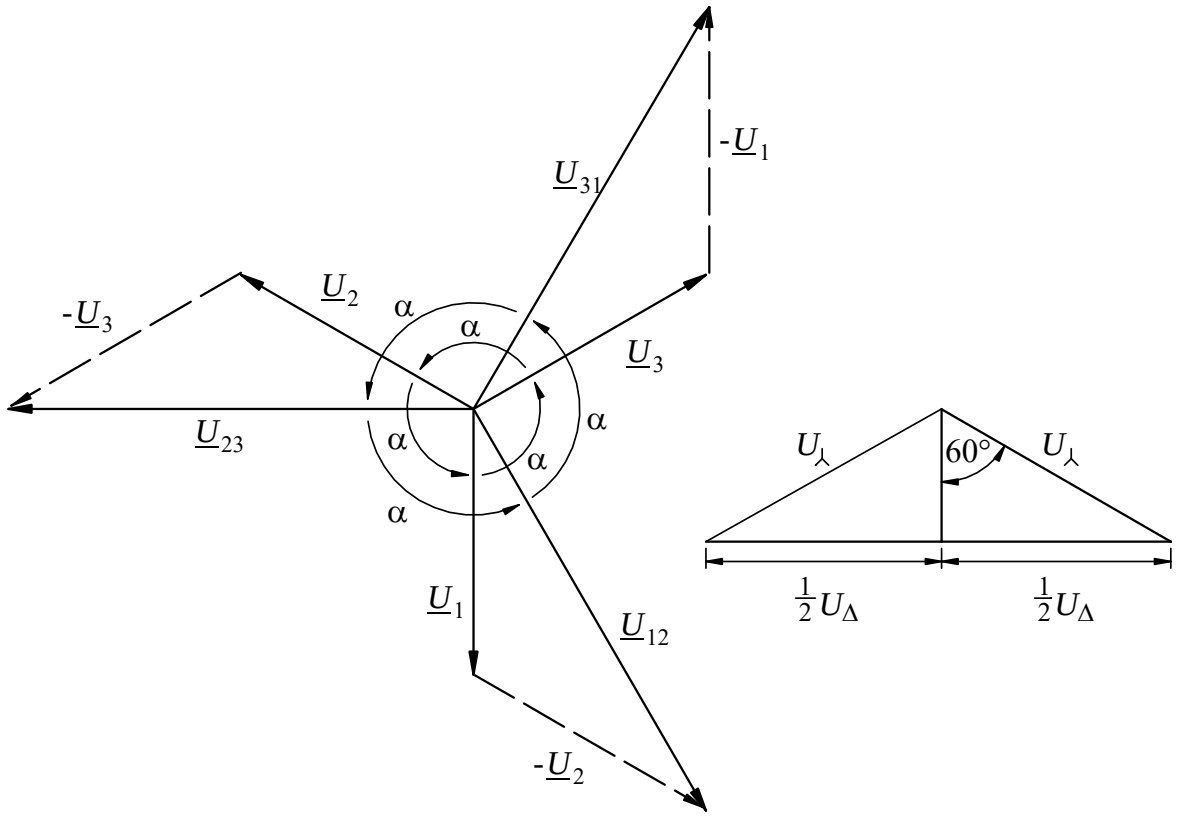
Gemäß der Knotenregel sind die Ströme im Neutralleiter gleich der Summe der Ströme in den Phasenleitern:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Die Phasenverschiebung zwischen den Sternspannungen beträgt:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120°$$

Zeigerdiagramm der Sternspannungen und der Dreieckspannungen:



Die Dreieckspannungen, sowie auch die Sternspannungen, haben einen Phasenwinkel von 120° zueinander.

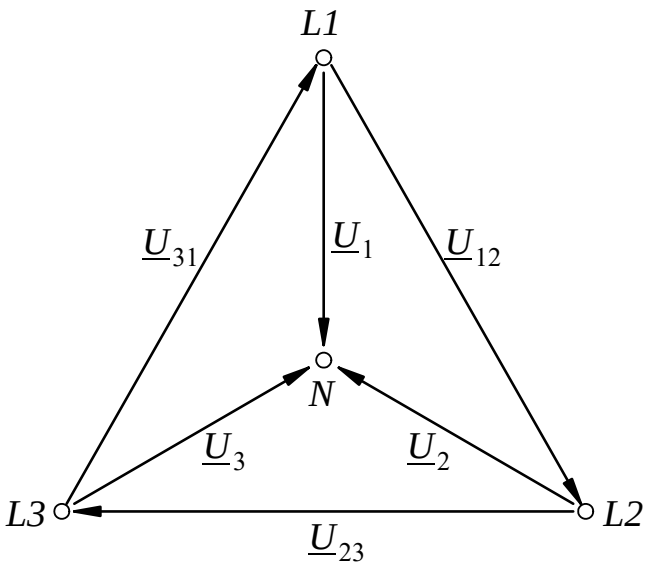
Die Beziehung zwischen Sternspannung und Dreieckspannung kann aus dem Dreieck rechts abgeleitet werden:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot U_{\Delta}}{U_{Y}} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U_{\Delta} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot U_{Y}$$

$$U_{\Delta} = \sqrt{3}\cdot U_{Y}$$

Eine weitere, gängige Methode, die Spannungen in einem Dreiphasensystem in einem Zeigerdiagramm darzustellen, ist nachstehend aufgezeigt:



Zeigerdiagramm mit Phasen und Neutralleiter

Im Folgenden ist die Bedeutung der Symbole, welche in Abschnitt 7.1 eingeführt wurden, nochmals zusammengefasst aufgeführt:

$\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$	Leiterströme
$\underline{I}_N$	Neutralleiterstrom
$\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$	Sternspannungen

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_Y = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

$\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$	Dreieckspannungen

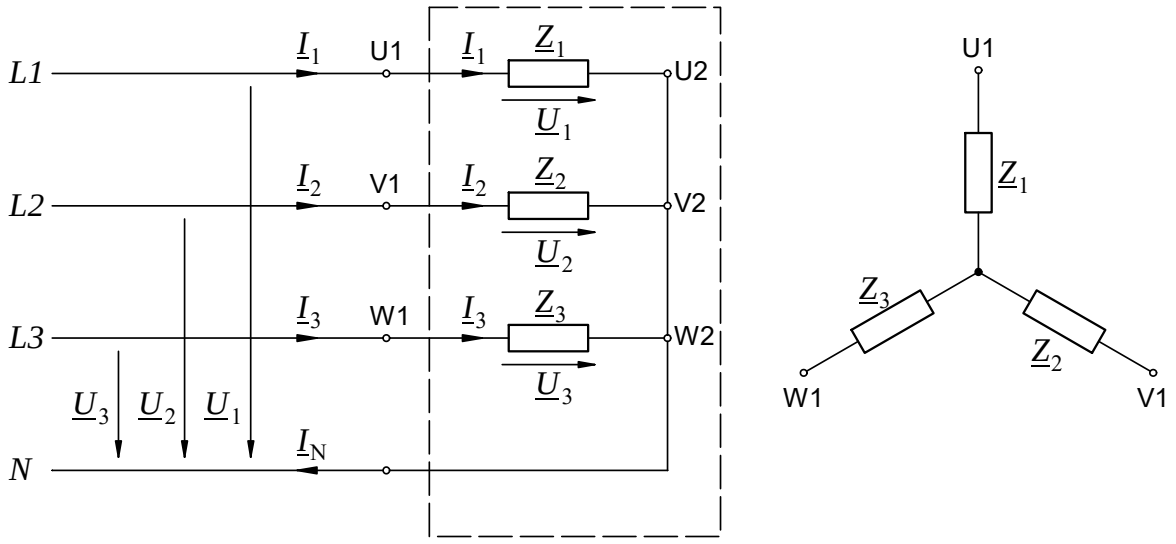
$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_\Delta = U$$

U	Nennspannung des Dreiphasensystems

7.2 Symmetrische Last

7.2.1 Sternschaltung

Symmetrische Last in Sternschaltung:



Die Bezeichnungen U1, V1, W1 und U2, V2, W2 beschreiben die Anschlüsse der symmetrischen Lastimpedanzen.

Strang, Strangspannung, Strangstrom und Strangwiderstand charakterisieren den Verbraucher.

Bei der Sternschaltung sind die folgenden Beziehungen anzuwenden:

Strangspannungen = Sternspannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$

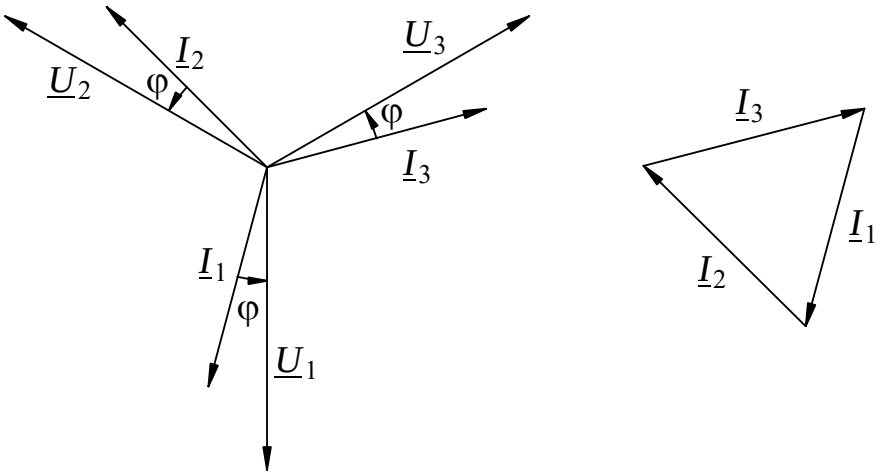
Strangströme = Leiterströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$

Die folgende Abbildung zeigt das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme für einen symmetrischen, induktiven Verbraucher in Sternschaltung mit:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

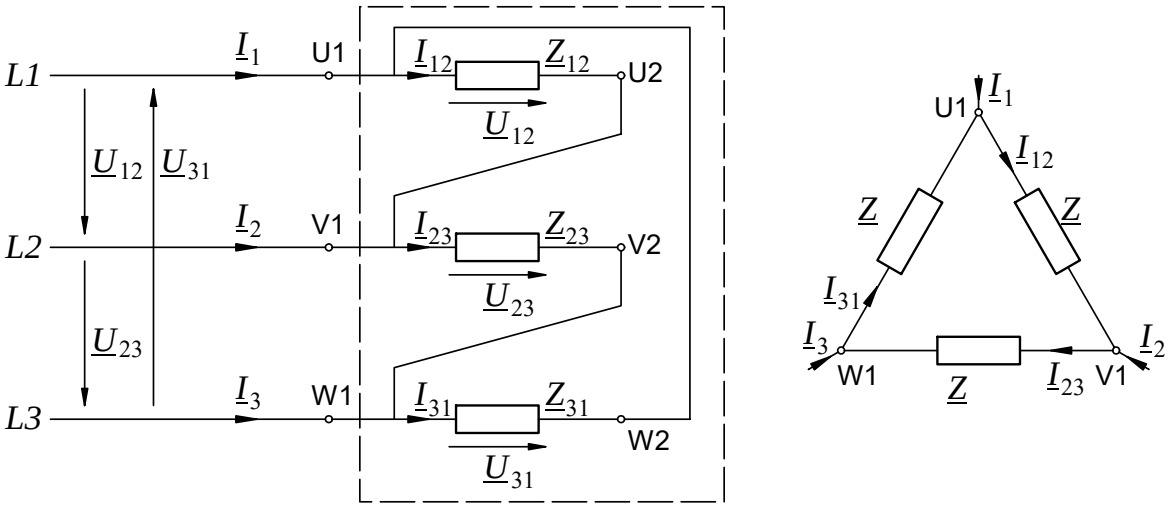
Der Neutralleiter wird in diesem Fall stromlos:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$



7.2.2 Dreieckschaltung

Symmetrische Last in Dreieckschaltung: $Z_{12} = Z_{23} = Z_{31}$



Bei der Dreieckschaltung sind die folgenden Beziehungen anzuwenden:

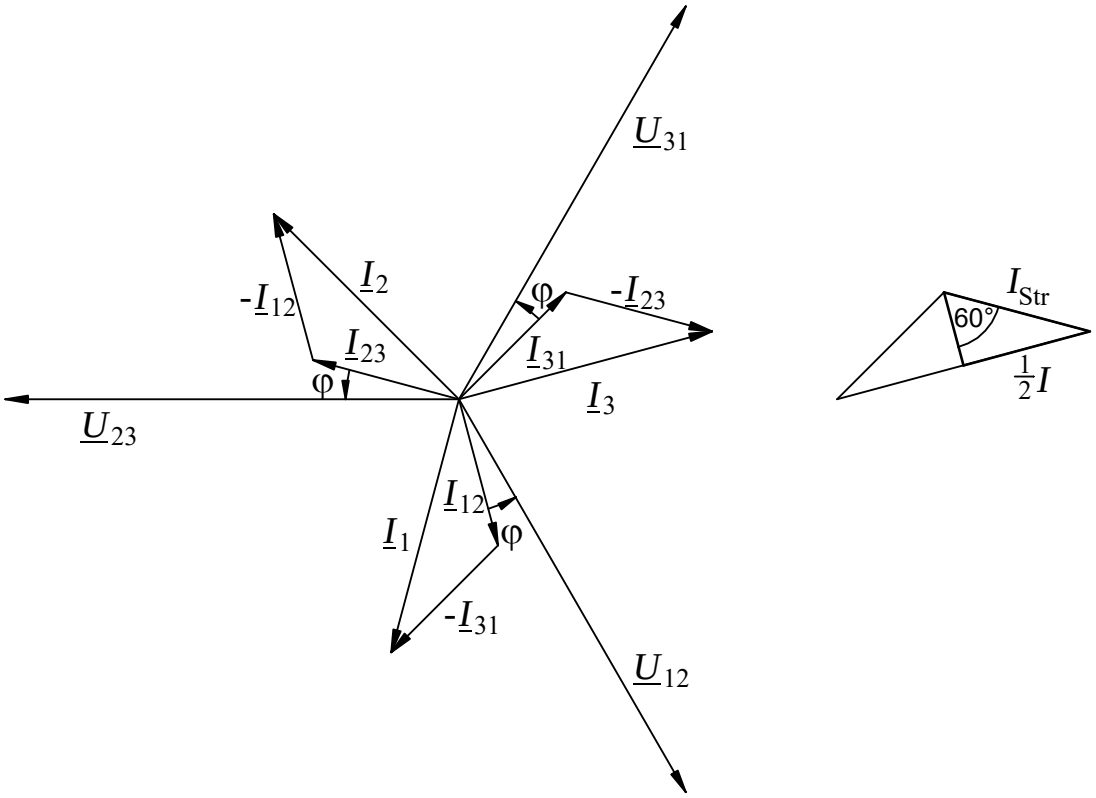
Strangspannungen = Dreieckspannungen $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$

Strangströme = Dreieckströme $\underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}$

Die Dreieckströme sind **nicht** gleich den Leiterströmen. Die Beziehung zwischen Dreieck- und Sternströmen wird wie folgt beschrieben:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme bei einer symmetrischen, induktiven Last in Dreieckschaltung:



Leiterstrom: $I = I_1 = I_2 = I_3$

Strangstrom: $I_{Str} = I_{12} = I_{23} = I_{31}$

Die Beziehung zwischen Leiterstrom und Strangstrom kann berechnet werden (siehe Dreieck rechts):

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot I}{I_{Str}} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I = \sqrt{3} \cdot I_{Str}$$

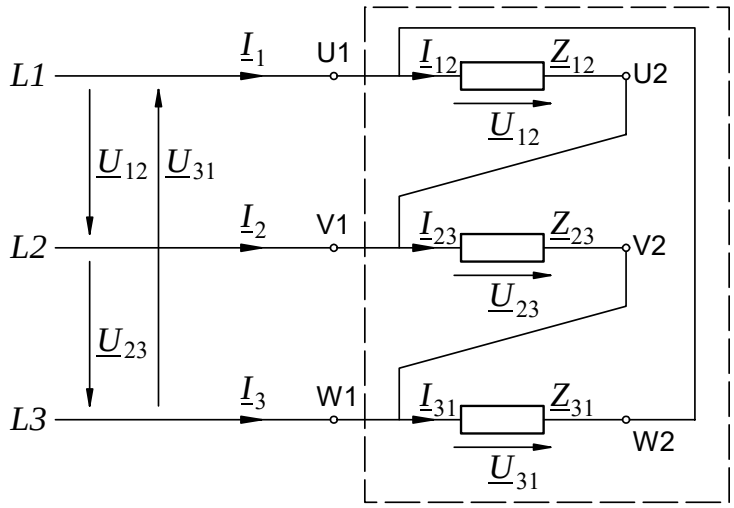
Diese Beziehung gilt nur für eine symmetrische Last!

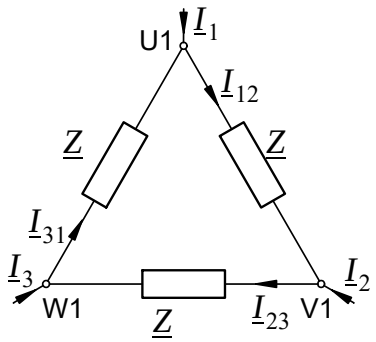
7.3 Unsymmetrische Last

7.3.1 Dreieckschaltung

Die Strangspannungen sind gleich den Dreieckspannungen: $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$.

Die drei Impedanzen Z_{12}, Z_{23}, Z_{31} sind jedoch nicht mehr identisch, daher der Begriff unsymmetrische Last.





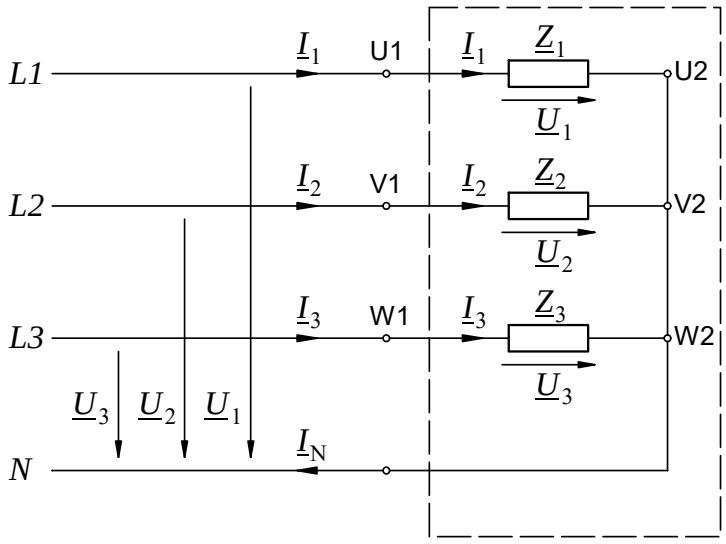
Die Strangströme können einfach berechnet werden:

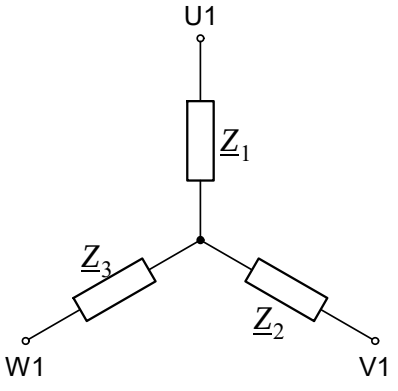
$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \qquad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} \qquad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

Die Leiterströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ können dann durch Anwenden der Knotenregel bestimmt werden.

7.3.2 Sternschaltung

a) mit angeschlossenem Sternpunkt:





Die Strangspannungen sind gleich den Sternspannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$

Die Strangströme können einfach berechnet werden:

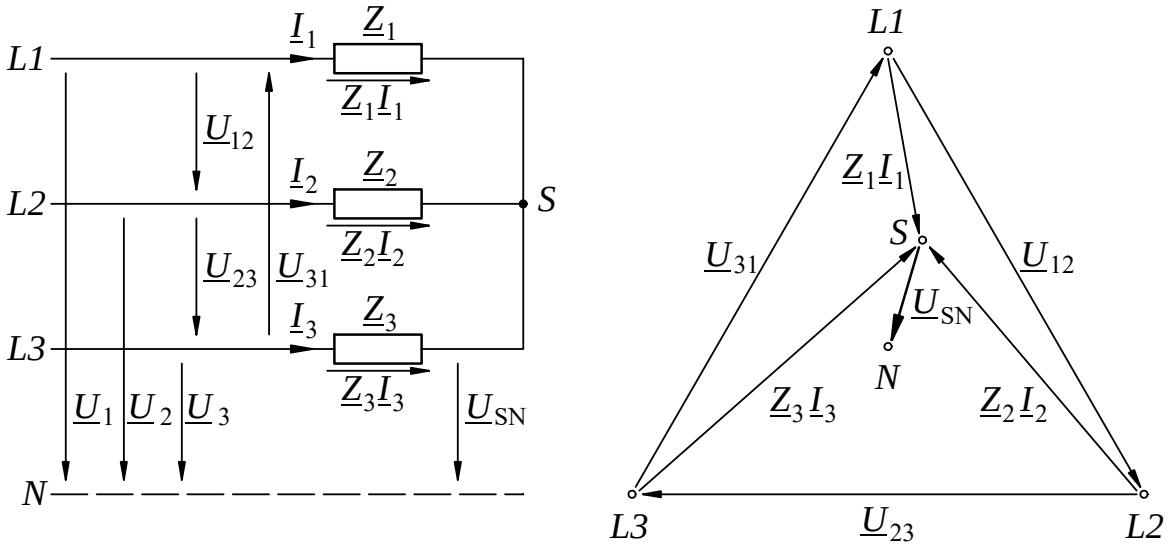
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}$$

Der Strom im Neutralleiter ergibt sich zu:

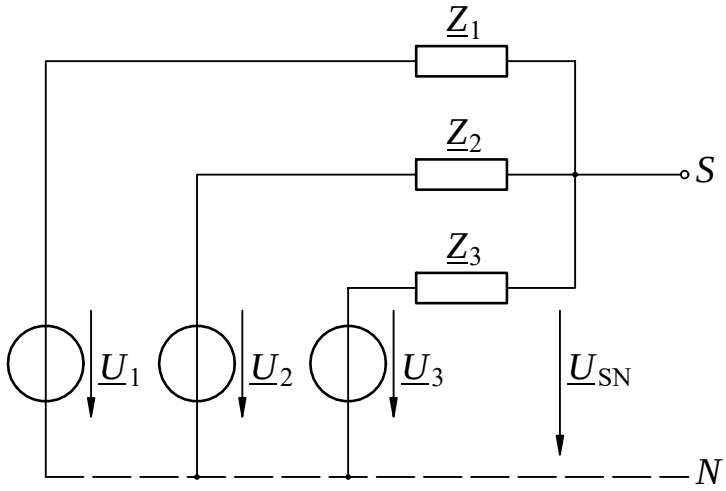
$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

b) ohne angeschlossenen Sternpunkt:

Nachstehende Abbildung zeigt eine unsymmetrische Last in Sternschaltung mit offenem Sternpunkt



Das Potential des Sternpunktes sowie die Strangspannungen sind unbekannt. Das Potential des Sternpunktes kann durch Anwenden des Ersatzspannungsquellenverfahrens ermittelt werden.



Der Kurzschlussstrom ergibt sich zu:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}$$

Der Innenwiderstand ergibt sich zu:

$$\underline{Z}_i = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

Die Spannung zwischen Sternpunkt und Neutralleiter kann damit wie folgt ausgedrückt werden:

$$\underline{U}_{SN} = \underline{I}_k \cdot \underline{Z}_i = \frac{\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

Die Strangströme, welche gleich den Leiterströmen sind, resultieren aus:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_1} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_2} \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_{SN}}{\underline{Z}_3}$$

Die folgende Tabelle zeigt einige allgemeine Regeln zur Bestimmung von Leiterspannung und Leiterstrom in symmetrischen und unsymmetrischen Dreiphasensystemen:

	Strangspannung	Strangstrom
Sternschaltung	$U_{Str} = U_Y = \frac{U}{\sqrt{3}}$ immer bei angeschlossenem Sternpunkt und sym. Last	$I_{Str} = I$ bei symmetrischer Last, sonst in jedem Strang anders
Dreieckschaltung	$U_{Str} = U_\Delta = U$ immer	$I_{Str} = \frac{I}{\sqrt{3}}$ bei symmetrischer Last, sonst in jedem Strang anders

7.4 Leistung im Dreiphasensystem

7.4.1 Wirk-, Blind- und Scheinleistung

In Abschnitt 5.7.5 wurden die folgenden Leistungsbeziehungen in Wechselstromkreisen abgeleitet:

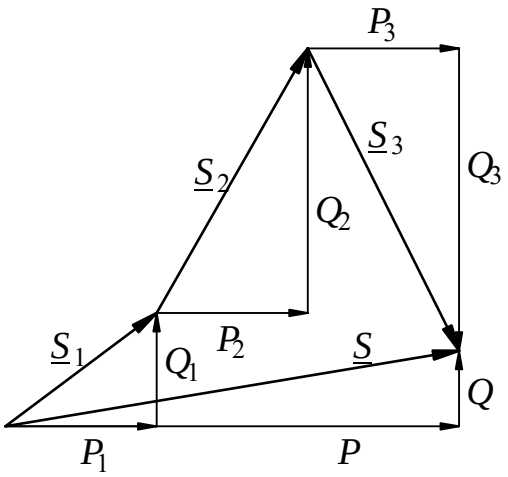
$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot \cos\varphi + jU \cdot I \cdot \sin\varphi$$
$$P = \mathrm{Re}\,\underline{S} = S \cdot \cos\varphi = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$
$$Q = \mathrm{Im}\,\underline{S} = S \cdot \sin\varphi = U \cdot I \cdot \sin\varphi$$

In einem Dreiphasensystem ist die Gesamtleistung die Summe der Leistungen je Phase. Wirkleistung und Blindleistung kann arithmetisch addiert werden, während die Scheinleistung geometrisch addiert werden muss:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3$$



Für den speziellen Fall des symmetrischen Verbrauchers am symmetrischen Netz sind sowohl alle Strangleistungen als auch Winkel und Richtung der Leistungszeiger gleich. Daraus folgt, dass die Gesamtleistung das Dreifache der Strangleistung beträgt:

$$P = 3 \cdot P_{Str} = 3 \cdot U_{Str} \cdot I_{Str} \cdot \cos\varphi$$
$$Q = 3 \cdot Q_{Str} = 3 \cdot U_{Str} \cdot I_{Str} \cdot \sin\varphi$$
$$S = 3 \cdot S_{Str} = 3 \cdot U_{Str} \cdot I_{Str}$$

Für Stern- und Dreieckschaltung ergibt sich z.B. für die Scheinleistung:

Stern	$U_{Str} = U_Y = \frac{U}{\sqrt{3}}$ $I_{Str} = I_Y = I$	$S = 3 \cdot \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot I = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$
Dreieck	$U_{Str} = U_\Delta = U$ $I_{Str} = I_\Delta = \frac{I}{\sqrt{3}}$	$S = 3 \cdot U \cdot \frac{I}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$

Entsprechendes gilt auch für Wirk- und Blindleistung, unabhängig von der Schaltungsart.

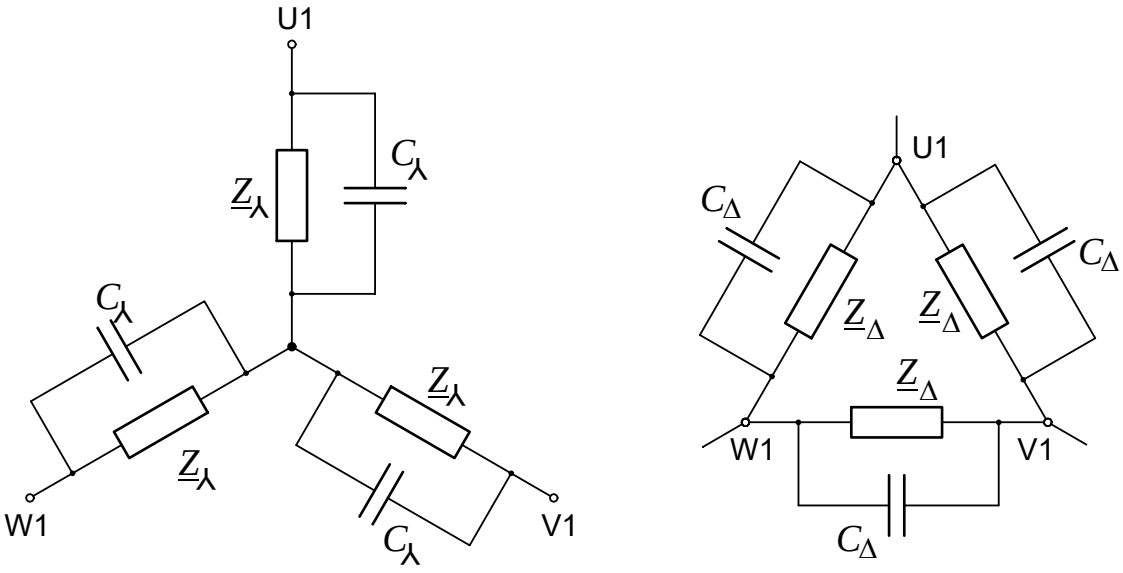
$$\boxed{\begin{aligned} S &= \sqrt{3} \cdot U \cdot I \\ P &= \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos\varphi \\ Q &= \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

Die Leistung wird im Allgemeinen immer in der Form mit *U* als Nennspannung des Netzes gegeben. *U* kann immer gemessen werden. U_Y kann nur dann gemessen werden, wenn der Neutralleiter zugänglich ist.

7.4.2 Blindleistungskompensation

Die Blindleistungskompensation in Dreiphasensystemen basiert auf dem gleichen Prinzip, welches in Abschnitt 5.7.6 für einphasige Verbraucher beschrieben wurde. Hier soll nur die Betrachtung für den symmetrischen Verbraucher erfolgen. Bei einem unsymmetrischen Verbraucher sind die Kompensationselemente nicht in allen drei Phasen gleich und müssen daher separat berechnet werden.

Blindleistungskompensation für Dreieck- und Sternschaltung eines symmetrischen, induktiven Verbrauchers:



Die nötige Kapazität kann ermittelt werden über:

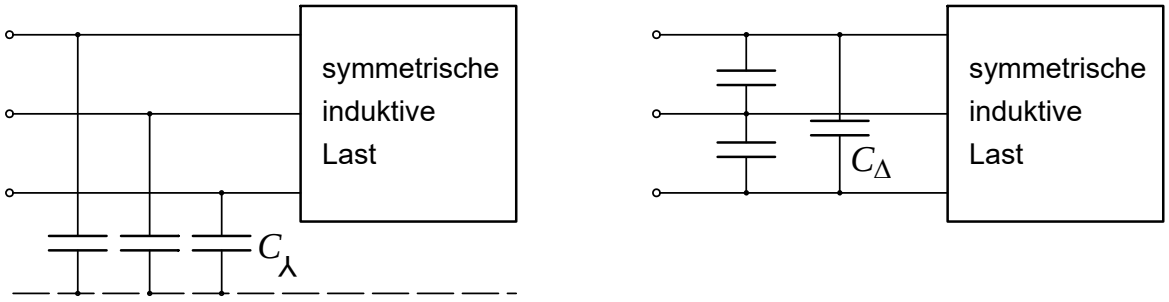
$$Q_{Str} = \omega \cdot C_{Str} \cdot U_{Str}^2$$

$$C_{Str} = \frac{Q_{Str}}{\omega \cdot U_{Str}^2} = \frac{Q}{3 \cdot \omega \cdot U_{Str}^2}$$

Stern	Dreieck
$U_{Str} = U_{\mathrm{Y}} = \frac{U}{\sqrt{3}}$ $C_{\mathrm{Y}} = \frac{Q}{3 \cdot \omega \cdot \left(\frac{U}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{Q}{\omega \cdot U^2}$	$U_{Str} = U_{\Delta} = U$ $C_{\Delta} = \frac{Q}{3 \cdot \omega \cdot U^2}$

Hier wird gezeigt, dass $C_{\mathrm{Y}} = 3 \cdot C_{\Delta}$, aber die Spannung an C_{Δ} um einen Faktor $\sqrt{3}$ größer ist.

Stern- und Dreieckanschluss bei der Blindleistungskompensation:



Für die Anordnung bei einer Blindleistungskompensation für einen symmetrischen Verbraucher können die folgenden Regeln angewandt werden (siehe auch nachstehende Abbildung).

wesentlich:	die zu kompensierende Blindleistung
unwesentlich:	Schaltungsart des symmetrischen Verbrauchers (Stern oder Dreieck)
üblich:	wegen der um den Faktor 3 kleineren Kapazität Kompensation im Dreieck

8. Schutz- und Sicherheitsmaßnahmen

Verbindliche Bestimmungen mit Gesetzescharakter: Normenreihe DIN VDE 0100

8.1 Allgemeines

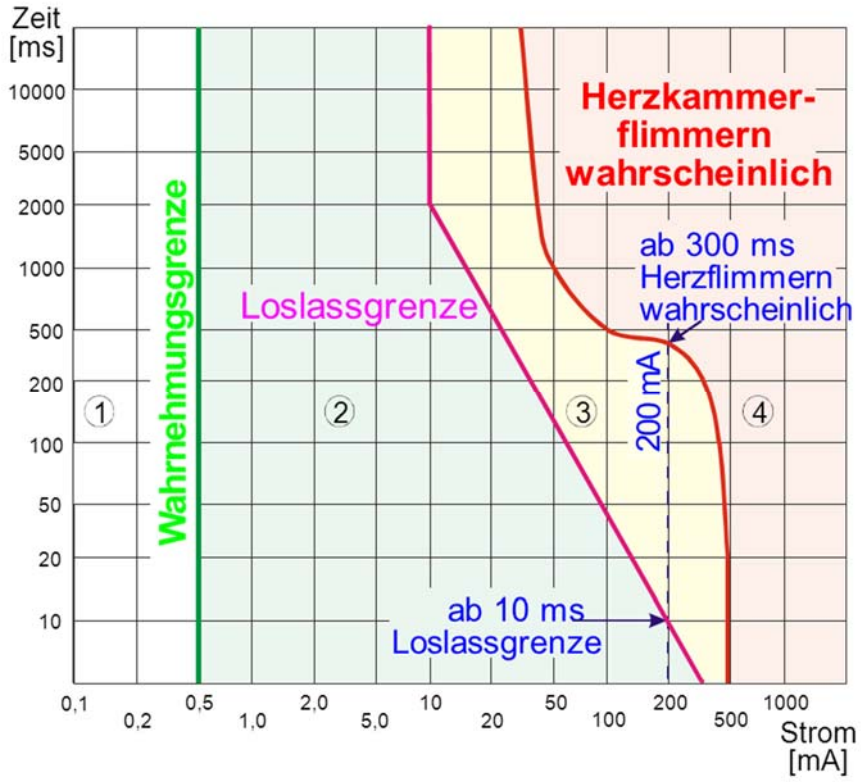
Unterschieden wird der Schutz gegen direktes Berühren aktiver Anlagenteile und der Schutz bei indirektem Berühren, der wirksam wird, wenn nicht-aktive, aber leitfähige Anlagenteile infolge von Fehlern gefährliche Berührungsspannungen annehmen. Die möglichen und anzuwendenden Schutzmaßnahmen hängen ab von den gewählten Netzarten. Man unterscheidet dabei folgende Netzarten:

TN: TN-S, TN-C, TN-C-S
TT
IT

Der 1. Buchstabe kennzeichnet die Behandlung des Netzsternpunktes, der 2. Buchstabe die des berührbaren Körpers: T steht für Erde, N für Neutralleiter und I für Isolation. Ein nachgestelltes S in der Netzform TN besagt, dass Schutzleiter (PE) und Neutralleiter (N) in der Anlage getrennt (= separated) verlegt sind, ein nachgestelltes C, dass sie in einem Leiter kombiniert (= combined) sind.

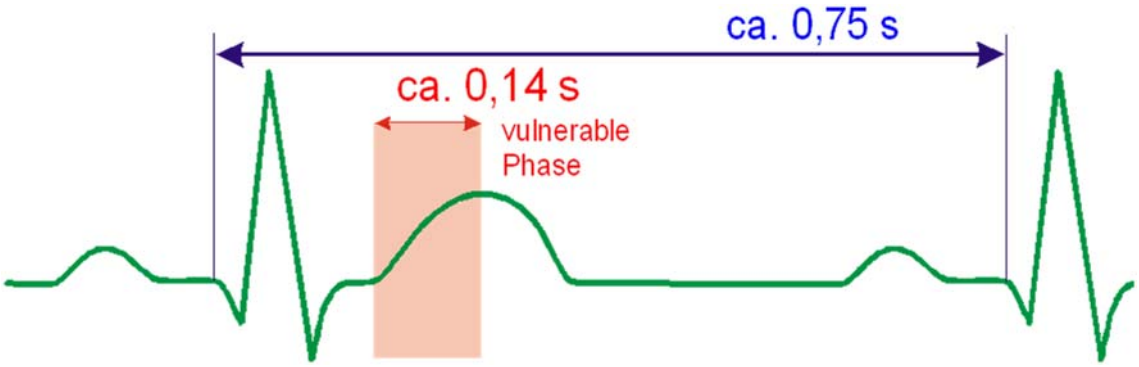
8.2 Wirkung des Stroms auf den menschlichen Körper

Die Reaktionen eines Stromes auf den menschlichen Körper sind abhängig von der Einwirkdauer und der Stromstärke durch den Körper. Aus Untersuchungen hat man vier Wirkungsbereiche festgelegt [DIN IEC 60479-1].

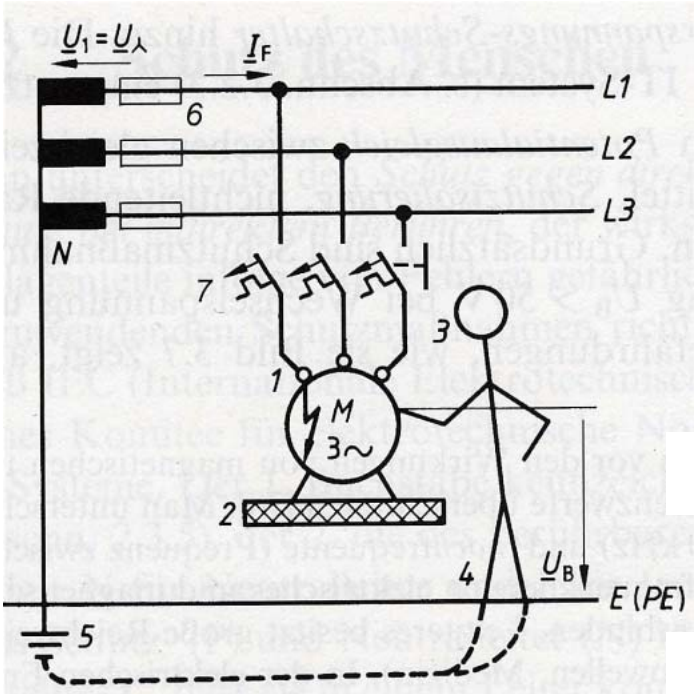


Zone 1: Keinerlei Auswirkungen und Reaktionen.
Zone 2: Keine schädlichen physiologischen Auswirkungen.
Zone 3: Keine Organschäden zu erwarten. Reversible Störungen der Reizbildung und Reizleitung im Herzen, Muskelkontraktion und Atemschwierigkeiten wahrscheinlich.
Zone 4: Herzkammerflimmern wahrscheinlich. Zunehmende Stromstärke und Einwirkdauer führen zu Herzstillstand, Atemstillstand und schweren Verbrennungen. Ab 500 mA kann jede kurzzeitige Einwirkung tödlich sein.

Fließt Wechselstrom über das menschliche Herz, so versucht es den schnelleren und stärkeren Impulsen von außen zu folgen. Es arbeitet deshalb schneller. Dabei kommt es zu Rhythmusstörungen des Herzens, d.h. das Herz arbeitet unregelmäßig. Fällt der Stromfluss in die so genannte vulnerable (verletzliche) Phase, kommt es zu dem gefährlichen Herzkammerflimmern. Als Folge davon fällt die Herztätigkeit aus. Daran schließt sich der Kreislaufstillstand an, was im weiteren Verlauf zum Tod führt [DIN IEC 60479-1].



Geht man von einem elektrischen Widerstand des menschlichen Körpers von R = 1 kΩ und einem Körperstrom von I = 50 mA aus, beträgt die maximal zulässige Berührungsspannung U = 50 V.



1 Drehstrommotor
2 Grundplatte
3 Mensch
4 Standort
5 Betriebserdung
6 Sicherungen
7 Motorschutzschalter

Das vorstehende Bild zeigt einen Unfallstromkreis, bei dem infolge des Gehäuseschlusses des Leiters L1 am Drehstrommotor der Mensch gegen seinen Standort die Berührungsspannung U_B abgreift. Zur Beurteilung einer Gefahr wird zwar U_B herangezogen, entscheidend ist aber der Strom durch den Körper (siehe oben).

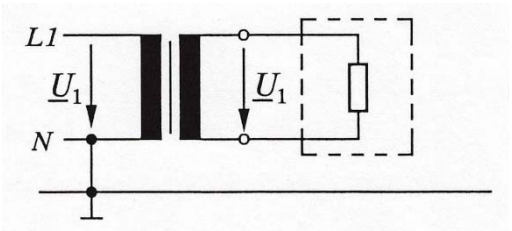
8.3 Schutzmaßnahmen [DIN VDE 0100 Teil 410]

8.3.1 Schutzkleinspannung

Hierbei werden Stromkreise mit Spannungen unterhalb der zulässigen Berührungsspannung von 50 V Wechselspannung (120 V bei Gleichspannung) betrieben. Dadurch ist keine lebensgefährliche Berührungsspannung möglich (außer es treten Spannungsresonanzen auf, siehe Abschnitt 5.6.6).

8.3.2 Schutztrennung

Bei der Maßnahme Schutztrennung wird zwischen Netz und Verbraucher ein Trenntransformator zur Potentialtrennung geschaltet. Der Transformator verhindert, dass am Verbraucher Spannungen aus dem geerdeten, speisenden Netz auftreten. Auf der Ausgangsseite besteht keine Spannung gegen Erde.



Um diese Schutzmaßnahme zu gewährleisten, darf an dem Trenntransformator nur ein Verbraucher angeschlossen sein. Die Steckverbindungen für den Ausgangs-stromkreis dürfen keine Schutzkontakte haben und ortsveränderliche Trenntrafos müssen schutzisoliert sein.

8.3.3 Schutzisolierung

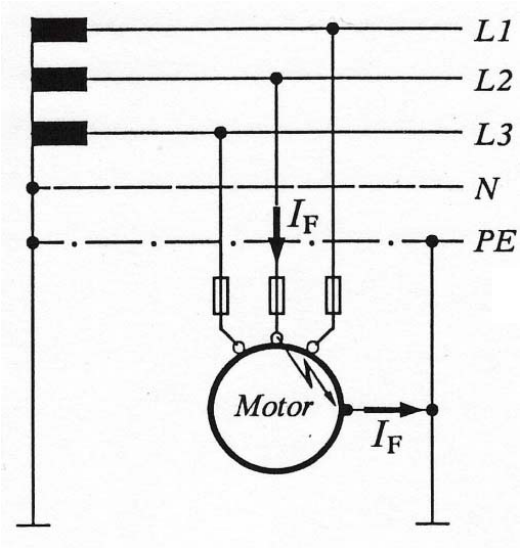
Das ist der Schutz gegen elektrischen Schlag unter normalen Bedingungen (Schutz gegen direktes Berühren). Er wird durch Isolieren aktiver Teile ebenso wie durch Abdeckungen oder Umhüllungen erreicht, z.B.:

- Silikon-ummantelte Laborleitungen,
- Kunststoffgehäuse einer Bohrmaschine oder einer Kaffeemaschine,
- Kunststoffdeckel bei Lichtschaltern und Steckdosen.

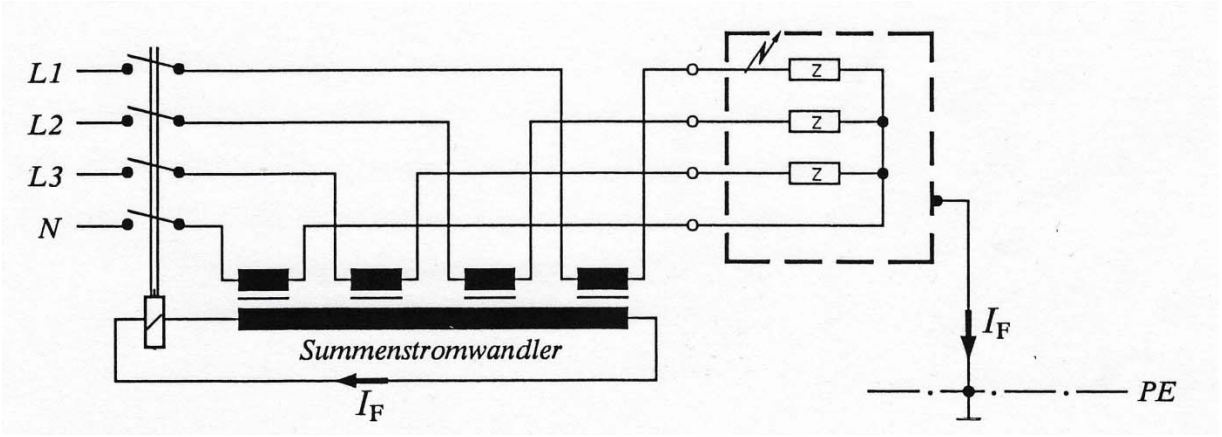
8.3.4 Schutzerdung

Bei der Schutzerdung ist der Schutzleiter (PE) mit dem Körper (Gehäuse) der elektrischen Betriebsmittel verbunden und man bezeichnet die Schutzmaßnahme auch als systemabhängig. Schutzleiter (PE) sind immer grüngelb gekennzeichnet.

Die Sicherung schaltet wegen des Fehlerstroms sofort ab.



8.3.5 Fehlerstrom-Schutzschalter (FI – RCCB)



Die FI-Schaltung überwacht die Summe der Ströme in einem Summenstromwandler. Im fehlerfreien Betrieb ist diese stets Null. Bei Gehäuseschluss eines geerdeten Geräts fließt jedoch der Fehlerstrom I_F über das Erdreich zum Sternpunkt des Transformators zurück; dieser Strom tritt auch auf der Sekundärseite des Summenstromwandlers auf und lässt das Stromrelais ansprechen (z.B. I_F > 30 mA).

8.3.6 NOT-AUS-Taster

In Unterrichtsräumen muss eine Einrichtung für eine Not-Ausschaltung vorhanden sein, durch deren Betätigung sämtliche Stromkreise an allen Experimentierständen des betreffenden Raumes im Gefahrenfall getrennt (stromlos gemacht) werden können.

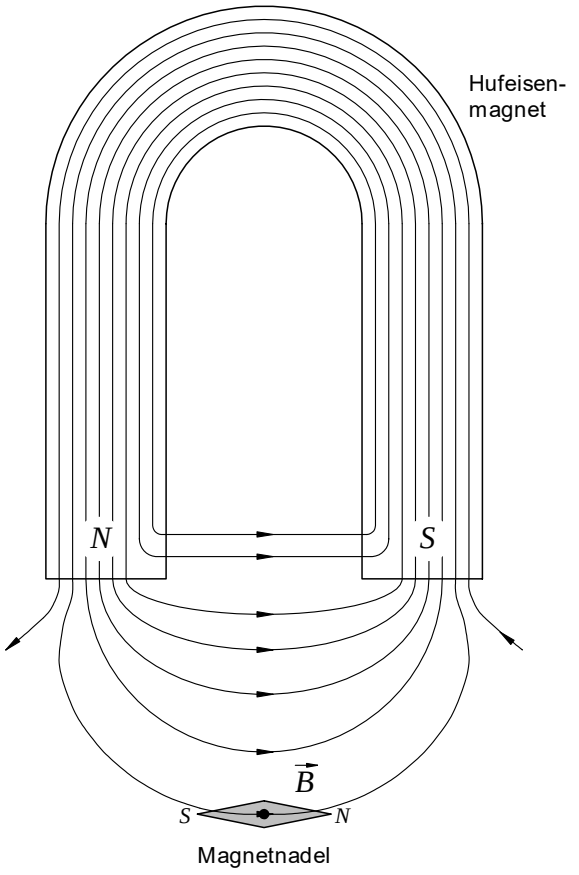
Das Schaltgerät für das Wiedereinschalten nach Betätigung der Einrichtung für Not-Ausschaltung muss gegen unbefugtes Einschalten gesichert sein und darf erst nach Beseitigung des Fehlerfalls durch das Laborpersonal betätigt werden.

9. Zeitunabhängige Magnetfelder

9.1 Einführung/Erscheinungsformen des Magnetismus

9.1.1 Polarität und Feldlinien

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Ursache und der Beschreibung des magnetischen Feldes beschäftigen. Dazu werden wie beim elektrischen Feld charakteristische Feldgrößen definiert und diesen Feldgrößen eine Ursache zugeordnet. Wie beim elektrischen Feld sind diese Größen abhängig von der Umgebung, in dem sich das magnetische Feld ausbreitet. Wir werden uns daher auch mit der Materialabhängigkeit des Magnetfeldes beschäftigen. Zuerst jedoch geht es um die Beschreibung des Magnetfeldes in einem materialfreien Raum.



Ein Permanentmagnet ist ein Stück Material, welches eine Kraft auf einen anderen Permanentmagneten oder auf ein ferromagnetisches Material ausübt. Ein Permanentmagnet besitzt zwei sogenannte Pole - einen Nordpol und einen Südpol. Ein Nordpol und ein Südpol ziehen sich gegenseitig an, wohingegen zwei Pole der gleichen Art sich abstoßen.

Der Nordpol einer Magnetnadel ist als jener Pol definiert, welcher in Richtung des Nordpols der Erde weisen würde, sofern sich die Magnetnadel in einem Kompassfrei bewegen könnte.

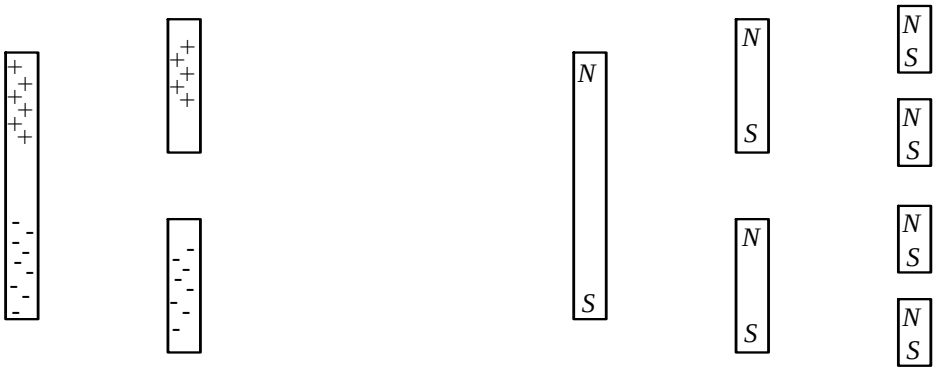
Es ist zweckdienlich, die Effekte des Magnetismus durch ein Vektorfeld zu beschreiben - das magnetische Feld $\vec{B}$.

Die Abbildung zeigt das magnetische Feld eines so genannten Hufeisenmagneten. Die Feldlinien verlassen den Magneten an dessen Nordpol und treten am Südpol wieder ein. Wie beim elektrischen Feld deutet ein verhältnismäßig kleiner Abstand der Feldlinien zueinander auf einen größeren Betrag des Feldvektors hin, so wie ein größerer Abstand der Feldvektoren auf ein schwächeres Feld schließen lässt. Eine frei bewegliche Magnetnadel wird sich nach den Feldlinien ausrichten, so dass deren Südpol in Richtung des Nordpols des Magneten weist.

Die Feldlinien formen einen geschlossenen Kreis, haben also weder einen Anfang noch ein Ende.

Im Vergleich zum elektrischen Feld gibt es also einen grundlegenden Unterschied. In einem elektrischen Feld beginnt jede Feldlinie bei einer positiven Ladung und endet bei einer negativen Ladung. Magnetische Felder sind dagegen in sich geschlossene Linien ohne Anfang und Ende.

Es gibt nichts Vergleichbares zu einer elektrischen Ladung im Magnetismus. Dies kann durch eine einfache, auf Erfahrung basierende Betrachtung gezeigt werden:

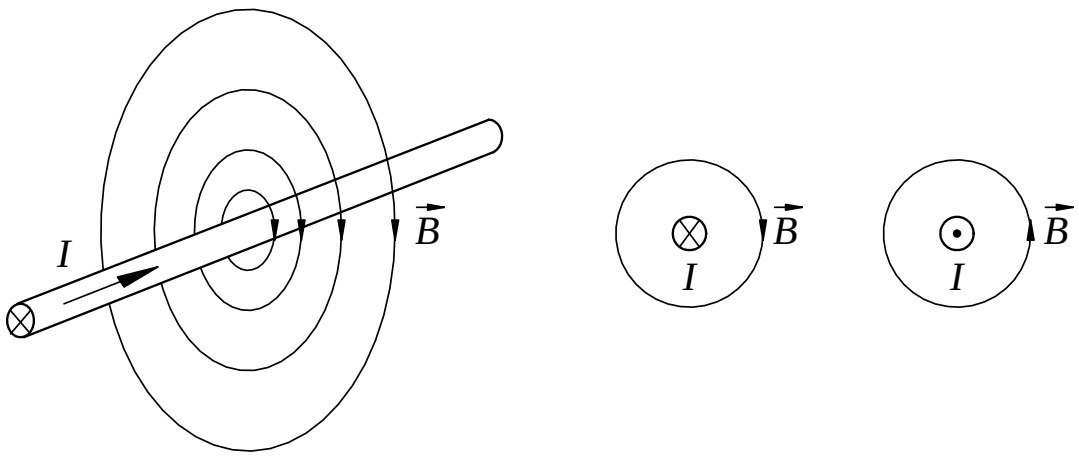


elektrisch magnetisch

Wird eine Stange, bestehend aus einem bestimmten, dielektrischen Material in ein elektrisches Feld eingebracht, werden die Ladungen innerhalb der Stange durch Influenz voneinander getrennt. Wird nun die Stange in zwei Hälften geteilt, so wird eine die positiven Ladungen und die andere die negativen Ladungen tragen.

Wird ein Permanentmagnet in zwei Hälften geteilt, werden beide Teile einen Nordpol und einen Südpol besitzen. Trotz weiteren Teilens der Teilstücke in immer kleinere Teilstücke werden diese Teilstücke immer einen Nord- und einen Südpol besitzen. Es gibt keinen einzelnen Nordpol bzw. einen einzelnen Südpol.

Permanentmagneten sind nicht die einzigen Quellen eines magnetischen Feldes. Wenn ein Strom I durch einen Leiter fließt, kann ein magnetisches Feld gemessen werden (z.B. durch Verwendung einer Magnetnadel), dessen Feldlinien konzentrische Kreise um den Leiter bilden.

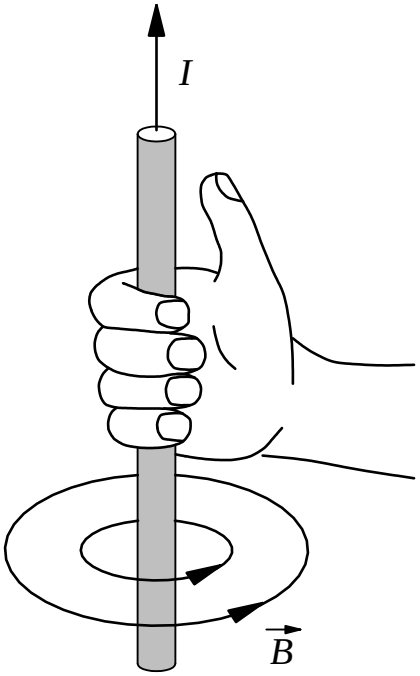


Wir stellen fest:

- in sich geschlossene Feldlinien
- Intensität nimmt wie $\frac{1}{r}$ ab $\Rightarrow B \sim \frac{1}{r}$
- Rechtsschraubige Zuordnung von Strom und Magnetfeld (Rechte-Hand-Regel).

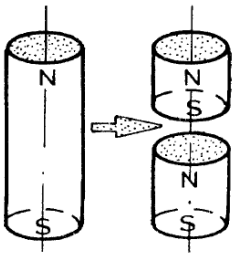
Die Richtung des magnetischen Feldes, welche mit der Richtung des Stromes gekoppelt ist, kann durch die sogenannte Rechte-Hand-Regel eindeutig bestimmt werden. Wenn der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Stromes zeigt, so zeigen die Finger in Richtung des magnetischen Feldes [4].

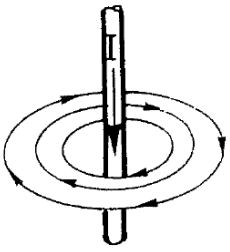
Eine weitere Alternative, um sich diesen Zusammenhang merken zu können, ist die Vorstellung einer Schraube mit Rechtsgewinde. Der Strom würde sich in diesem Falle auf die axiale Bewegung der Schaube beziehen, während die Drehrichtung die Richtung der Feldlinien veranschaulicht.

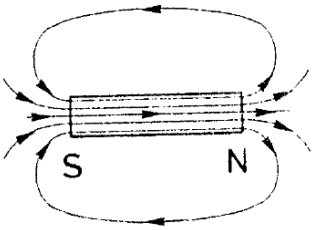


Wie später noch gezeigt wird, bilden die Feldlinien um einen unendlich langen, geraden Leiter konzentrische Kreise um diesen Leiter.

Wir kennen also zwei Ursachen für ein magnetisches Feld: ein Magnetfeld kann verursacht werden durch einen sog. Permanentmagneten oder durch einen elektrischen Strom, das heißt durch bewegte Ladungen.

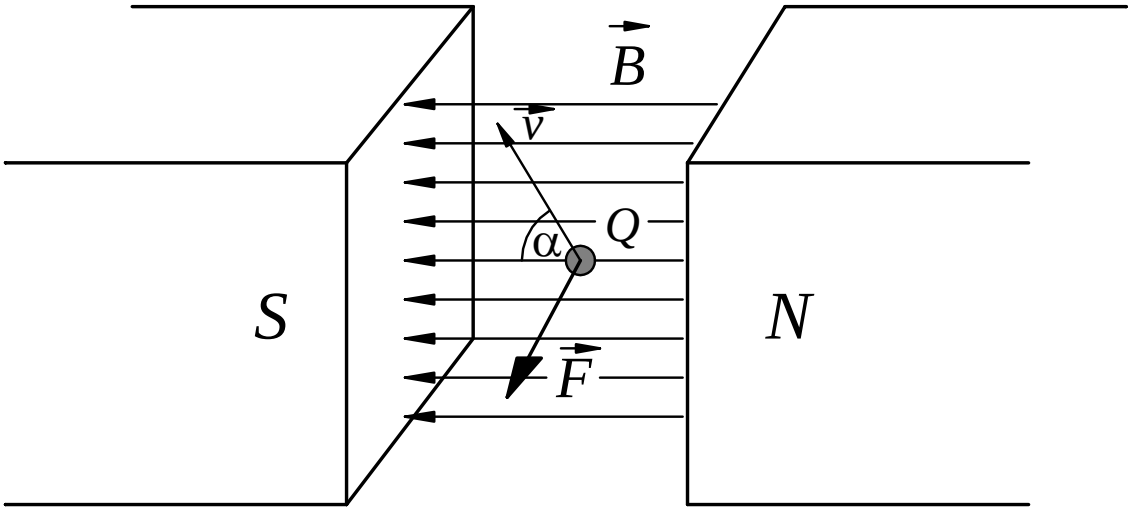




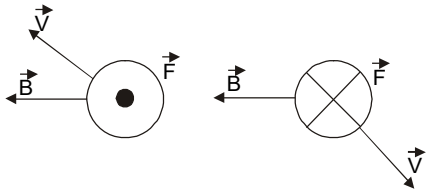


9.1.2 Kraft auf eine bewegte elektrische Ladung

Die Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen, die sich in Ruhe befinden, ist durch das Coulomb-Gesetz berechenbar. Diese Kraft ist zwar klein, sie kann jedoch durch ein Experiment nachgewiesen werden. Bewegt sich nun eine elektrische Ladung in einem Magnetfeld, kann eine zusätzliche Kraft auf diese Ladung nachgewiesen werden. Diese zusätzliche Kraft wird als Lorentz-Kraft bezeichnet.



Das Experiment ergibt: $F \sim Q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$

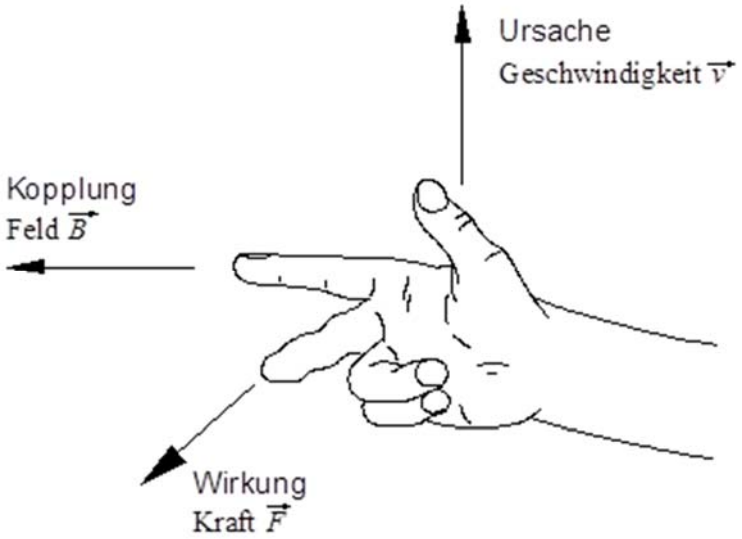


Richtung der Kraft $\vec{F} \cong$ Vorschubrichtung einer Rechtsschraube, wenn man den Vektor $\vec{v}$ über den kleinsten Winkel in den Vektor $\vec{B}$ hineindreht (für $Q > 0$!).

Mathematische Beschreibung:

$$\boxed{\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

Durch die Wahl des Proportionalitätsfaktors = 1 wird die Größe $\vec{B}$ definiert (vgl. Abs.9.1.5).



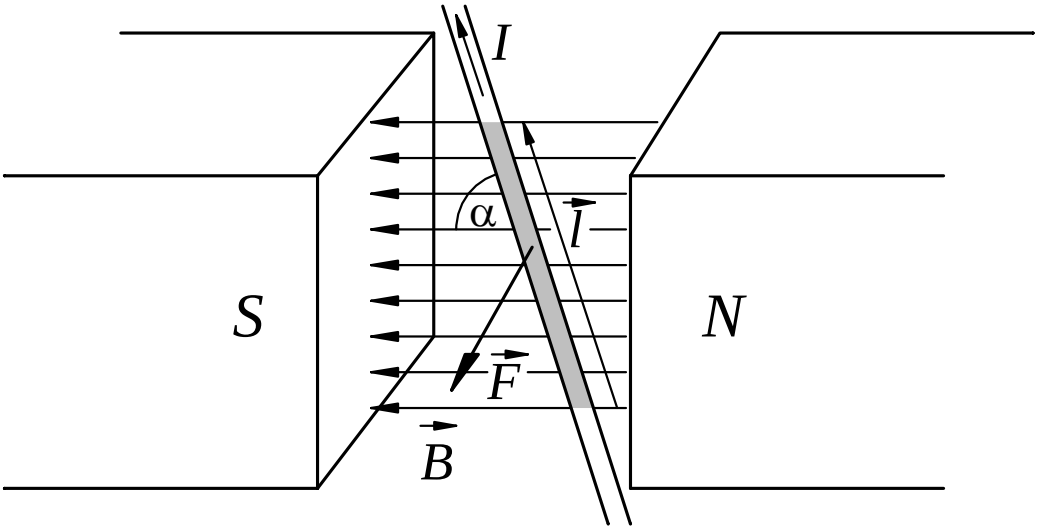
Die Richtung der Kraft ist auch leicht darstellbar als „Rechte-Hand-Regel“ (U-V-W-Regel der rechten Hand) [4]:

- Daumen	Ursache	Bewegung *v* (Strom *I*)
- Zeigefinger	Vermittlung	Magnetfeld *B*
- Mittelfinger	Wirkung	Kraft *F*.

Eine technische Anwendung der Kraftwirkung auf bewegte elektrische Ladungen stellt der Hall-Effekt dar. Andere Anwendungsgebiete der Lorentz-Kraft sind die magnetisch-induktive Durchflussmessung oder die Ablenkung eines Elektronenstrahls, z.B. in einem Rasterelektronenmikroskop (REM).

9.1.3 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

Die Magnetkraft zwischen den einzelnen bewegten elektrischen Ladungen ist sehr klein, verglichen mit der Coulomb-Kraft, so dass die Magnetkraft auf eine einzelne bewegte elektrische Ladungen experimentell kaum nachgewiesen werden kann. Bewegt man jedoch eine Vielzahl von Ladungen, wie dies bei einem Strom in einem metallenen Leiter gegeben ist, dann ergeben sich gut messbare Kräfte. Diese Kräfte sind so groß, dass sie in einer Vielzahl von Systemen zur Anwendung kommen. Die gesamte elektrische Motorentechnologie beruht auf der Anwendung magnetischer Kräfte.



t ist die Zeit, die die Ladung zum Zurücklegen der Strecke *l* benötigt.

Ersetzt man die Ladung durch den Strom und gleichzeitig die Geschwindigkeit durch die Länge *l* pro Zeit, so ergibt sich eine weitere, neue Beschreibung der Lorentz-Kraft:

$$I = \frac{Q}{t} \qquad Q = I \cdot t \qquad \vec{v} = \frac{\vec{l}}{t} \qquad \vec{l} = \text{Vektor in Stromrichtung}$$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

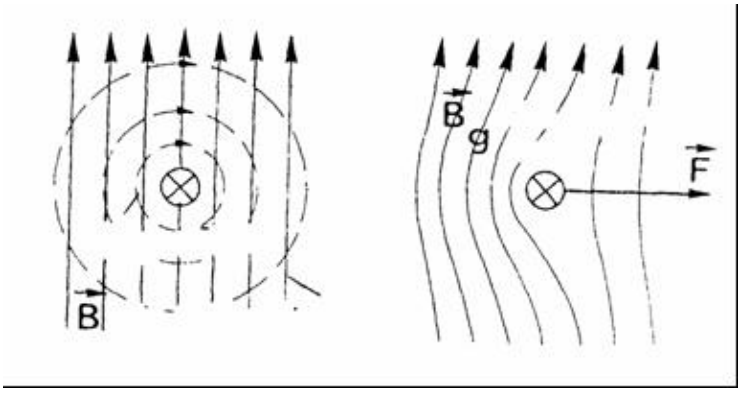
$$\vec{F} = I \cdot t \cdot \frac{\vec{l}}{t} \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}}$$

Ist der Winkel zwischen dem Leiter und dem magnetischen Feld α, kann diese Gleichung auch ohne die Vektorpfeile geschrieben werden

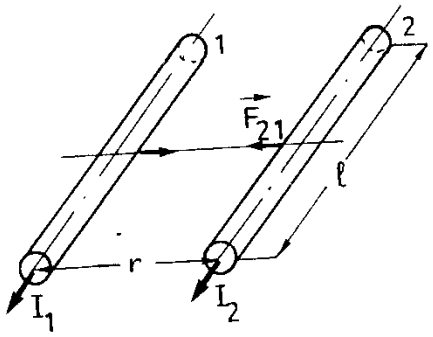
$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

Eine anschauliche Erklärung der Kraftwirkung ergibt sich auch aus der Überlagerung der beiden Magnetfelder:



9.1.4 Kraft zwischen zwei Leitern

Im nebenstehenden Bild sind zwei metallene Leiter parallel angeordnet. Sie führen die Ströme I_1 und I_2. Der Abstand zwischen den beiden Leitern sei r [1].



Durch ein Experiment kann nun nachgewiesen werden, dass zwischen den beiden Leitern eine Kraft existiert:

$$F = k \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{r}$$

Die Proportionalitätskonstante k ist gleich:

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi} \qquad \text{und man erhält:} \qquad F = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2\pi \cdot r}$$

Die Dimension der Naturkonstanten μ_0 ist gegeben durch die Dimension der Kraft, der Dimension der Länge und der Dimension des Stromes:

$$[\mu_0] = \frac{[F] \cdot [l]}{[l] \cdot [I]^2} = \frac{VAs \cdot \cancel{m}}{\cancel{m} \cdot m \cdot A^2} = \frac{Vs}{Am}$$

Diese Naturkonstante wird als Permeabilität des freien Raumes oder magnetische Feldkonstante bezeichnet. Sie hat den Wert (vgl. dazu auch 9.1.7):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Der Zahlenwert für μ_0 ergibt sich aus der Definition der Stromstärke – Einheit im internationalen Einheitensystem (SI):

Wenn zwei parallele Leiter im Vakuum mit d = 20 cm Abstand pro Meter Länge eine Kraft F = 1 N aufeinander ausüben, so definiert man den fließenden Strom als 1 kA.

Übrigens: Die beiden Leiter ziehen sich an, wenn die beiden Ströme gleiche Richtung haben (wie im Bild dargestellt); sie stoßen sich ab, wenn die beiden Ströme unterschiedliche Richtung aufweisen.

9.1.5 Magnetische Flussdichte, Induktion

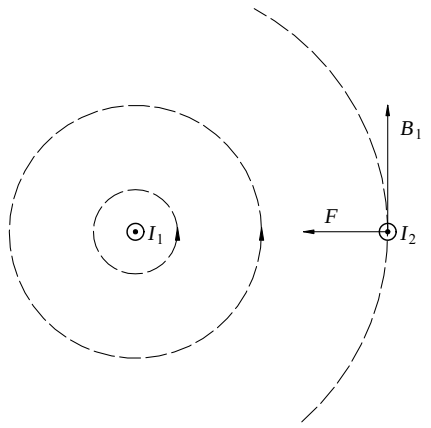
$\vec{B}$ beschreibt die Wirkung des Magnetfeldes. Diese Größe wird als Induktion oder als magnetische Flussdichte bezeichnet.

Dadurch, dass in dem proportionalen Zusammenhang $\vec{F} \sim Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ der Proportionalitätsfaktor = 1 gewählt wird, ist $\vec{B}$ definiert.

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{Einheit [B]} = \frac{N}{As \cdot \frac{m}{s}} = \frac{Nm}{Am^2} = \frac{Ws}{Am^2} = \frac{Vs}{m^2} = T \text{ (Tesla)}$$

9.1.6 Magnetische Feldstärke



Ein langer stromdurchflossener Leiter erzeugt ein Magnetfeld, das mit 1/*r* abnimmt. (vgl. 9.1.1)

Dabei hängt die Induktion $\vec{B}$ aber außerdem noch vom Material ab:

$$B = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r}$$

μ = Materialkonstante (siehe 9.1.7)

$\frac{1}{2 \cdot \pi}$ = fester Proportionalitätsfaktor (siehe 9.2.1)

Die Wirkung des Magnetfeldes ist also außer von seiner Ursache und vom Ort auch noch vom Material abhängig.

Definition einer zweiten Feldgröße, die sich nur auf die Ursache des Feldes bezieht, die Materialeigenschaften aber unberücksichtigt lässt:

Magnetische Feldstärke $H = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r}$ $\qquad \text{Einheit } [H] = \frac{A}{m}$

Die vorgestellten Gleichungen gelten für das Magnetfeld des langen stromdurchflossenen Leiters.

Allgemein gilt: $\boxed{\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}}$

9.1.7 Permeabilität

$$\mu = \frac{B}{H} \qquad \text{Einheit}[\mu] = \frac{\frac{T}{A}}{\frac{m}{m}} = \frac{\frac{Vs}{m^2}}{\frac{A}{m}} = \frac{Vs}{Am}$$

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

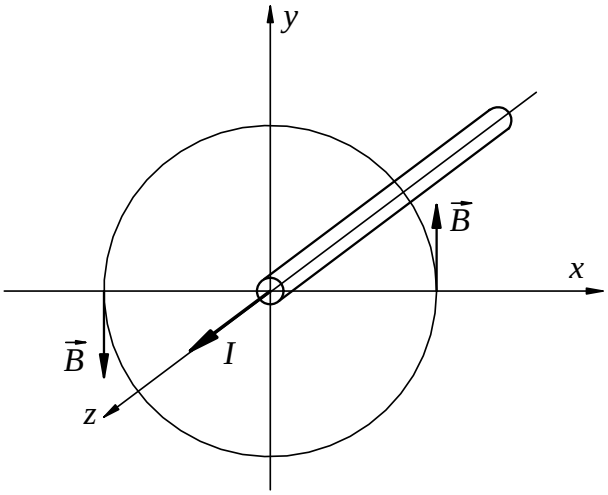
Magnetische Feldkonstante: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 1{,}257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$

(Permeabilität des freien Raumes)

Permeabilitätszahl μ_r

9.1.8 Magnetische Flussdichte um lange, gerade Leiter

Betrachten wir nun die magnetische Flussdichte um einen unendlich langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter. Dieser wird in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeordnet. Der Leiter erstreckt sich längs der z-Achse. Zur Berechnung der magnetischen Flussdichte längs der x-Achse können wir die Definitionsgleichung für die magnetische Flussdichte B (siehe 9.1.6) wie folgt umschreiben:



linke Seite

$$\vec{B}(x) = -\vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot |x|}$$

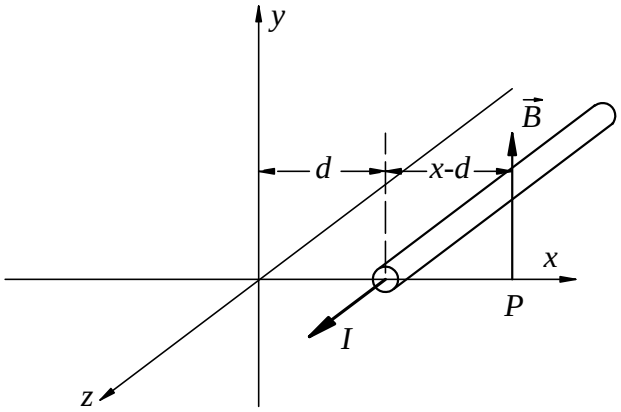
rechte Seite

$$\vec{B}(x) = \vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot |x|}$$

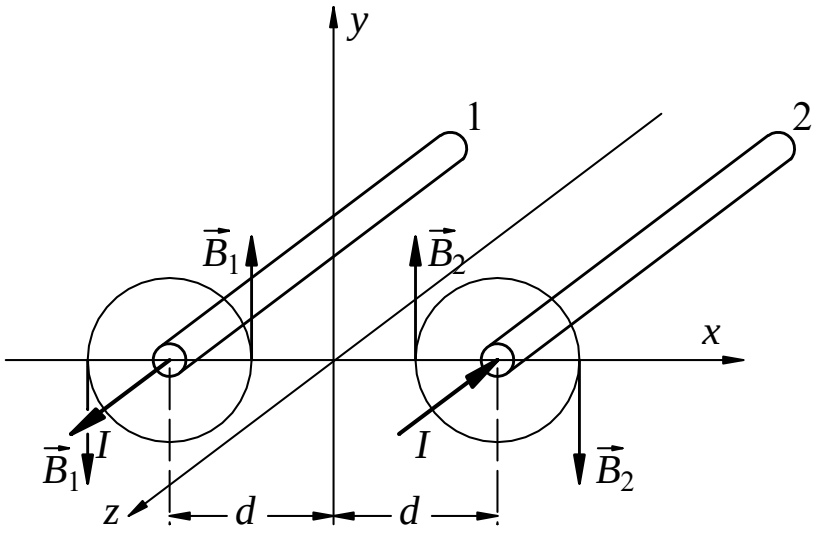
Zusammengefasst in einer Formel ergibt sich: $\vec{B}(x) = \vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot x}$

In vielen Fällen befindet sich der Leiter nicht im Ursprung des Koordinatensystems. In diesem Fall muss die Formel um die Verschiebung des Leiters *d* aus dem Ursprung angepasst werden; der Abstand zum Punkt *P* beträgt dann *(x-d):*

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot (x-d)} \cdot \vec{e}_y$$



Nun kann auch die Anordnung mit zwei parallel angeordneten Leitern behandelt werden, wie sie bereits in 9.1.4 beschrieben wurde. Allerdings fließen die Ströme in beiden Leitern jetzt gegensinnig. Die beiden Leiter befinden sich in der Ebene, welche durch die Achsen x und z definiert wird. Die beiden Leiter sind parallel zur z-Achse. Der Abstand zum Ursprung des Koordinatensystems ist durch +/-*d* gegeben.



Wir können nun für jeden Leiter das Feld längs der x-Achse formulieren. Für den Leiter links des Ursprungs gilt: und für den rechten Leiter gilt:

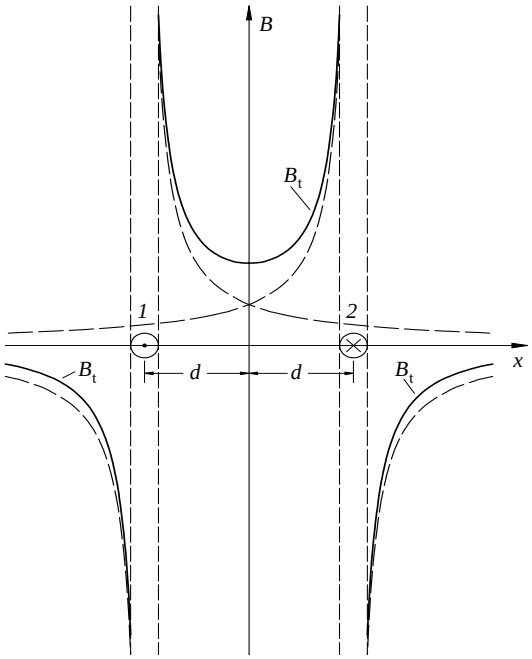
$$\vec{B}_1 = \vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot (x+d)} \qquad \vec{B}_2 = \vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0 \cdot (-I)}{2\pi \cdot (x-d)}$$

Das gesamte Feld folgt aus der Überlagerung der beiden Einzelfelder:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(d+x)} + \frac{1}{(d-x)} \right)$$

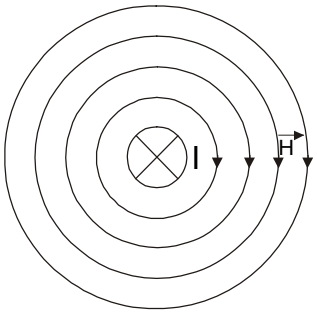
$$\vec{B} = \vec{e}_y \cdot \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d}{\pi \cdot (d^2 - x^2)}$$

Das Ergebnis ist die Verteilung der magnetischen Flussdichte bei einer Leiterschleife (siehe nebenstehendes Bild).



9.2 Durchflutungsgesetz

9.2.1 Durchflutungssatz (Ampere's Law)



Beispiel: Der lange stromdurchflossene Leiter

Der Gesamteinfluss, den das Fließen des Stromes in dem Leiter auf den umgebenden Raum ausübt, ist proportional der Stromstärke I und der Leiterlänge l.

Dieser Gesamteinfluss verteilt sich mit wachsendem Abstand *r* auf eine immer größer werdende Zylinder-Mantelfläche $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$. Damit wird die

Einflussdichte = magnetische Feldstärke

$$\Leftarrow H = \frac{I \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l} = \underline{\underline{\frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}}}$$

$$\underline{\underline{I = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}}$$

⇑

Spezialfall des Durchflutungssatzes:

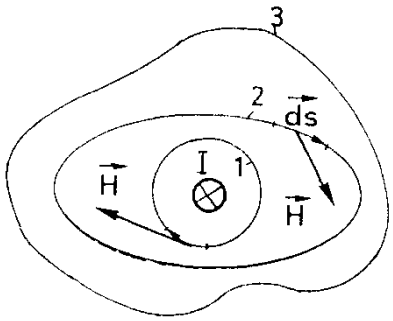
$$\boxed{I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}}$$

Hierin ist *I* stets der Strom, der die vom Integrationsweg umrandete Fläche insgesamt durchsetzt.

Es ist empfehlenswert, grundsätzlich nur entlang einer Feldlinie zu integrieren; dann haben $\vec{H}$ und $d\vec{s}$ immer dieselbe Richtung, und es gilt:

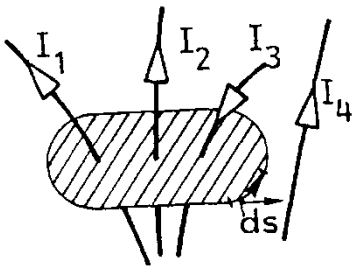
$$\boxed{I = \oint H \cdot ds}$$

Der von dem Wissenschaftler Ampere gefundene Durchflutungssatz besagt also, dass das Ergebnis dieser Integration, wenn sie auf einem in sich geschlossenen Weg erfolgt, gleich dem durch die Integration eingeschlossenen Strom ist. Man kann zeigen, dass das Ergebnis dieser Integration unabhängig von dem Weg ist, der gewählt wird. Es ist daher sinnvoll, die Integration so zu wählen, dass sich für die Integration möglichst einfache mathematische Ausdrücke ergeben.



Das Durchflutungsgesetz gilt nicht nur für einen einzelnen Leiter. Durch die Integration können auch eine Vielzahl von Leitern eingeschlossen werden, die unterschiedliche Ströme und/oder unterschiedliche Stromrichtungen aufweisen können. In diesem Fall bezeichnet man die wirksame Summe dieser Ströme als Durchflutung Θ. Bei der Berechnung elektrischer Maschinen wird dieser Begriff häufig benötigt.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 - I_3 = \Theta$$



Das Durchflutungsgesetz kann auch auf massive Leiter mit einer ungleich verteilten Stromdichte angewendet werden. In diesem Fall ist es aber notwendig, statt des gesamten Stromes das Flächenintegral der Stromdichte einzusetzen.

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Ist in dem Integrationsweg kein Strom enthalten, so ist das Ergebnis 0.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

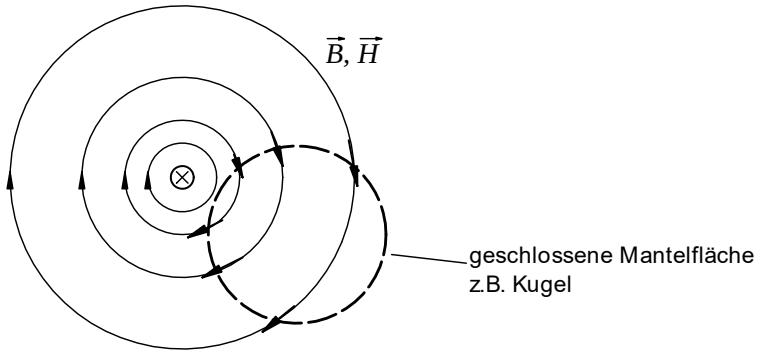
Die eben besprochenen einzelnen Fälle können mathematisch wie folgt dargestellt werden:

1. Im Falle eines einzelnen Leiters gilt:
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

2. Sind mehrere Leiter vorhanden, so schreibt man:
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_{k=1}^{n} I_k = \Theta$$

3. Betrachtet man das Feld im Inneren eines Leiters oder ist die Verteilung der Stromdichte nicht gleichmäßig, dann gilt:
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \Theta$$

9.2.2 Magnetisches Wirbelfeld



Magnetische Feldlinien sind in sich geschlossen. Sie haben weder Anfang noch Ende, weil es keine magnetischen Ladungen gibt, die (wie beim elektrischen Feld) die Quellen oder Senken des Magnetfelds bilden könnten.

Die Feldlinien der magnetischen Induktion, die durch eine in sich geschlossene Hülle hindurch in ein Volumen eintreten, müssen an anderer Stelle wieder austreten.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Diese Gleichung besagt also, dass das magnetische Feld keine Quellen hat.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

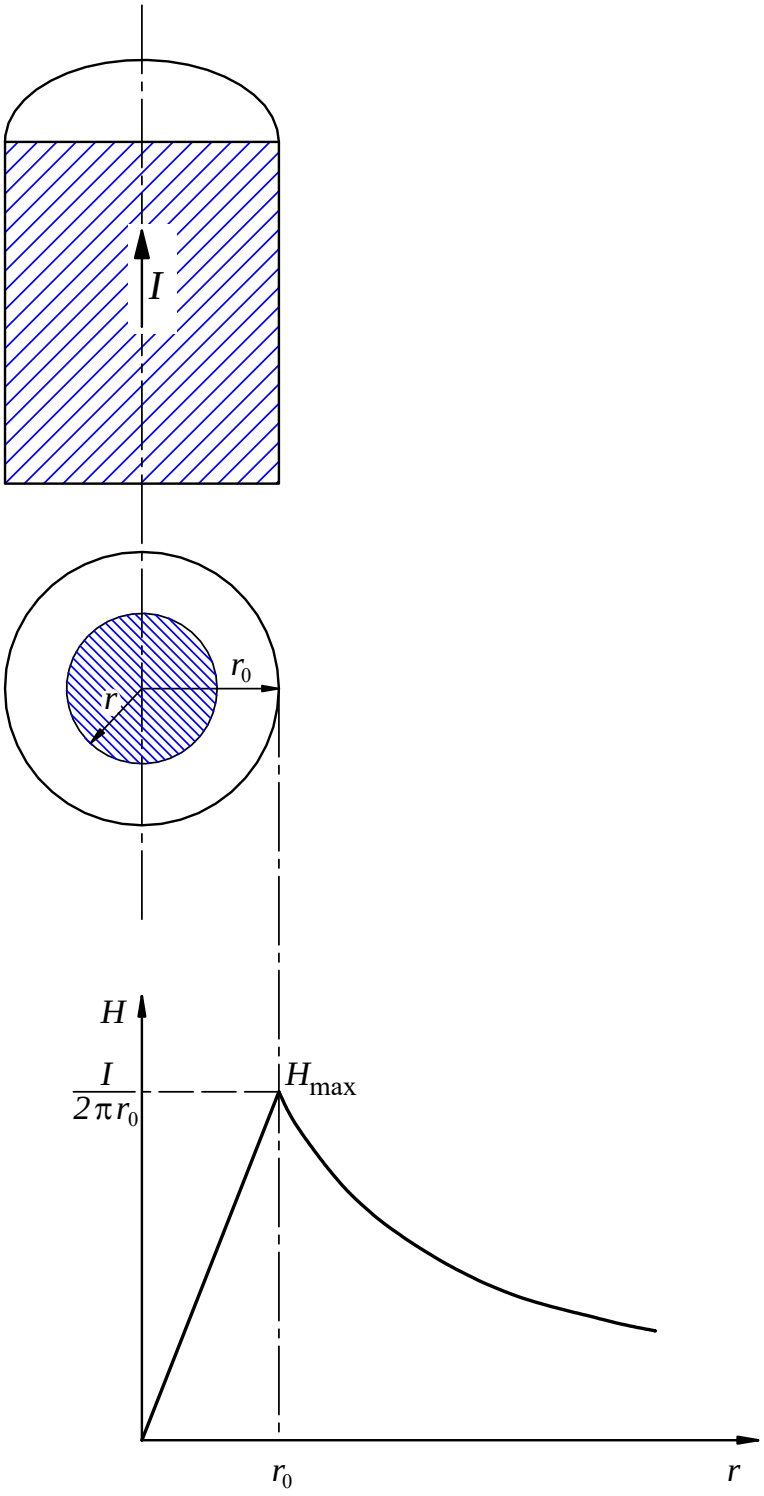
Der Durchflutungssatz zeigt hingegen, dass das magnetische Feld Wirbel hat.

Das magnetische Feld ist ein quellenfreies Wirbelfeld

9.2.3 Magnetfeld des geraden Leiters

$r \geq r_0$ außerhalb des Leiters $\quad H = \dfrac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$ (vgl. Abs. 9.1.6)

$r \leq r_0$ innerhalb des Leiters $\quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I'$



I´ ist der Strom, der die vom Integrationsweg umrandete Fläche durchsetzt.

I ist der Gesamtstrom.

Wegen der Symmetrie der Anordnung ist *H* auf dem Integrationsweg (konzentrischer Kreis) überall gleich.

$$H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{I}{\pi \cdot r_0^{\,2}} \cdot \pi \cdot r^2$$

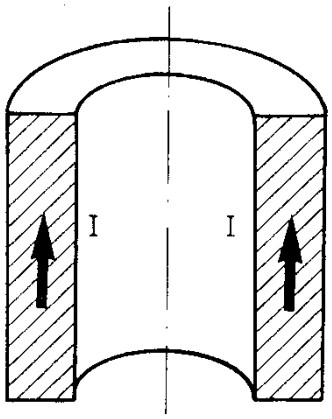
$$H = \frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_0^{\,2}}$$

Gesamtverlauf

9.2.4 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Rohres

Eine weitere häufig verwendete Struktur ist das stromdurchflossene Rohr. In diesem Fall befindet sich im Zentrum ein Bereich ohne Strom. Wir gehen weiter davon aus, dass die Stromdichte in der Wand des Rohres konstant sei. Es sind also mehrere Bereiche zu unterscheiden [4].

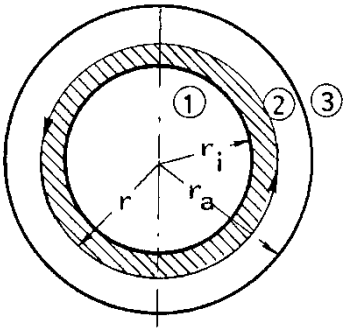
1. $0 \le r \le r_i$:



Im inneren Bereich befindet sich kein Strom. Es wird also in diesem Bereich auch kein Feld existieren, da kein Strom eingeschlossen wird.

$$\oint H_1 \cdot ds = 0 \Rightarrow \boxed{H_1 = 0}$$

2. $r_i \le r \le r_a$:



Der Bereich der Rohrwand ist durch einen zunehmenden Strom gekennzeichnet. Je weiter man zur Außenseite des Rohres kommt, desto größer wird die umschlossene Strommenge.

$$I_i = J \cdot A_i = \frac{I}{\pi \cdot \left(r_a^2 - r_i^2\right)} \cdot \pi \cdot \left(r^2 - r_i^2\right)$$

$$\oint H_2 \cdot ds = H_2 \cdot 2\pi \cdot r = I \cdot \frac{r^2 - r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{\left(r^2 - r_i^2\right)}{\left(r_a^2 - r_i^2\right)}$$

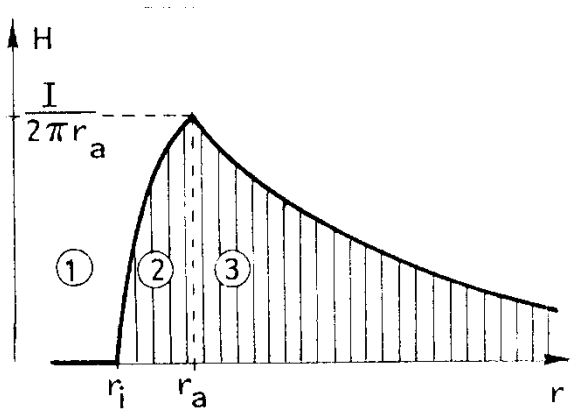
3 $r \ge r_a$:

Außerhalb des Rohres ist, wie bereits gesagt, keine Zunahme des Stroms mehr vorhanden und es gilt:

$$H_3 = \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

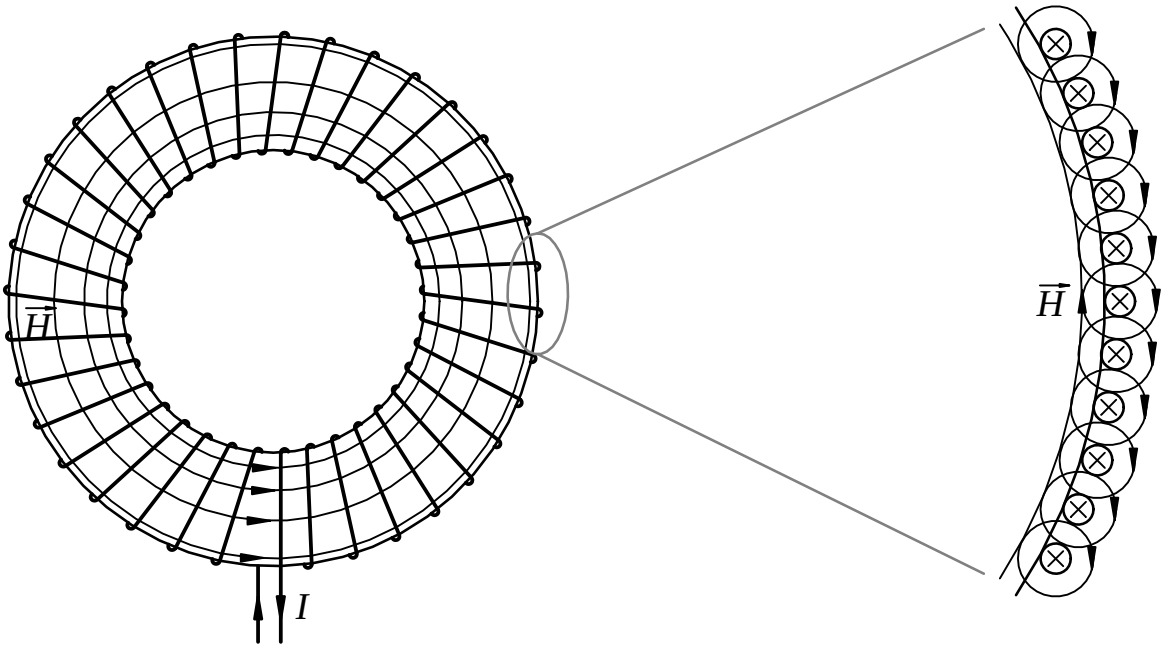
Das Maximum des Feldes stellt sich an der äußeren Oberfläche des Rohres ein:

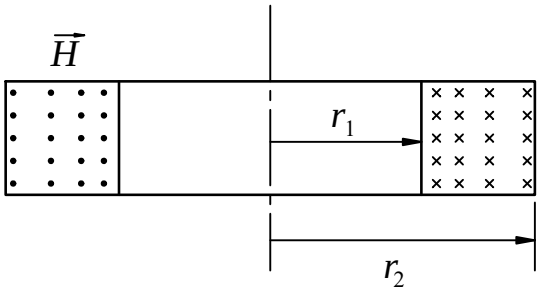
$$H_{\max} = \frac{I}{2\pi \cdot r_a}$$



9.2.5 Magnetfeld der Ringspule

N Windungen sehr dicht beieinander. Die Anordnung ist quasi zylindersymmetrisch. Das resultierende Magnetfeld ergibt sich aus der Überlagerung der Magnetfelder der einzelnen Windungen.





$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I = \Theta \quad \Longrightarrow$$

$r < r_1$ $\qquad H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 0$

$$\underline{\underline{H = 0}}$$

$r_1 \leq r \leq r_2$ $\qquad H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = N \cdot I$

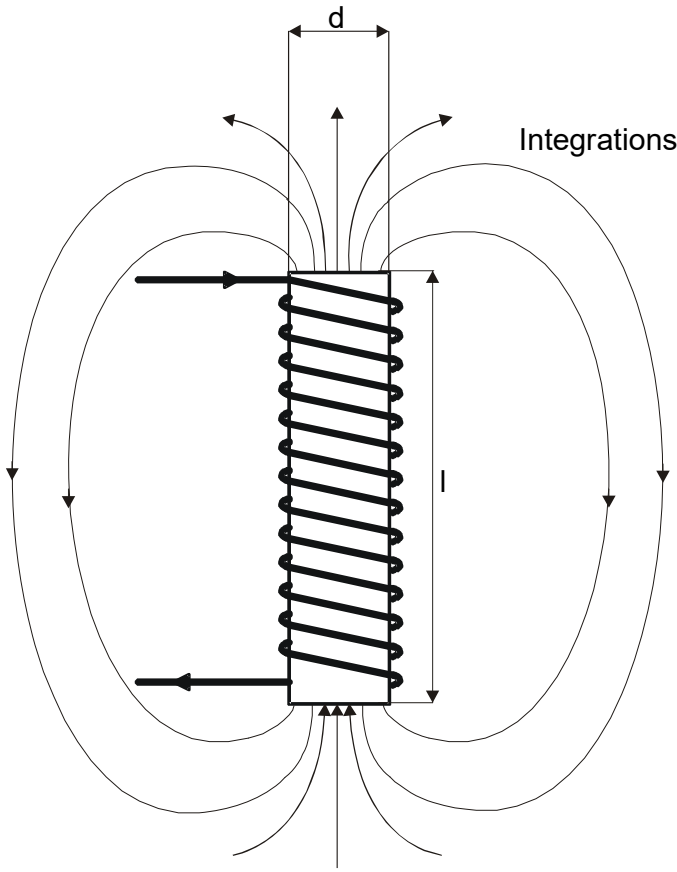
$$\underline{\underline{H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}}}$$

$r > r_2$ $\qquad H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = N \cdot I - N \cdot I$

$$\underline{\underline{H = 0}}$$

Ein Magnetfeld existiert offensichtlich nur im Wickelkörper!

9.2.6 Magnetfeld der (langen) Zylinderspule



$l >> d$

N Windungen sehr dicht beieinander. Feldlinien drängen sich im Inneren der Spule überall in gleicher Weise.

Daher:
homogenes Feld großer Feldstärke

Feldlinien schließen sich über den Außenraum. Dieser ist unendlich groß. $\Rightarrow$

geringe Feldliniendichte $\cong$ kleine Feldstärke

(Außerhalb des Zylinders ist der Abstand der Feldlinien wesentlich größer, weshalb das äußere magnetische Feld wesentlich kleiner ist als das innerhalb des Zylinders)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot l + \int_{Außenraum} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta \qquad \int_{Außenraum} \vec{H} \cdot d\vec{s} << H \cdot l, \text{wenn } l >> d$$

$$H \cdot l \approx N \cdot I$$

$$H \approx \frac{N \cdot I}{l}$$

Vergleich mit dem Ergebnis für die Ringspule:

Zu einem Kreis gebogene Zylinderspule der Länge $l = 2 \cdot \pi \cdot r$

$$H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

9.3 Gesetz von Biot-Savart

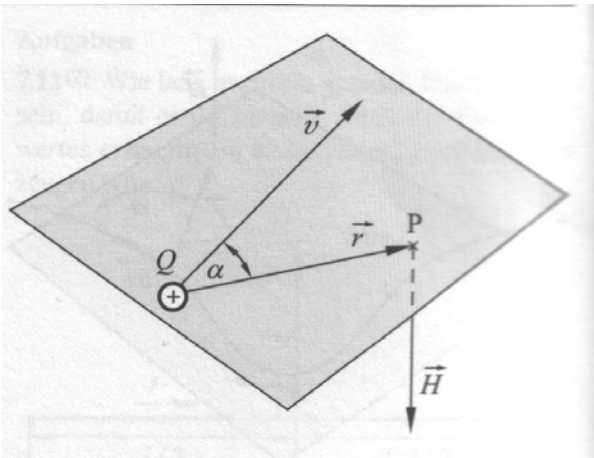
9.3.1 Magnetfeld bewegter Ladungen

Durchflutungssatz: Kann üblicherweise nur für einfache, symmetrische Fälle analytisch angewandt werden.

Für andere, technisch wichtige Fälle: Gesetz von Biot-Savart (kann aus Durchflutungssatz abgeleitet werden).

Ansatz: Jede Bewegung einer elektrischen Punktladung *Q* ruft im gesamten Raum eine magnetische Feldstärke H hervor [2]:

$$H = \left| \frac{Q \cdot v \cdot \sin\alpha}{4\pi \cdot r^2} \right|$$

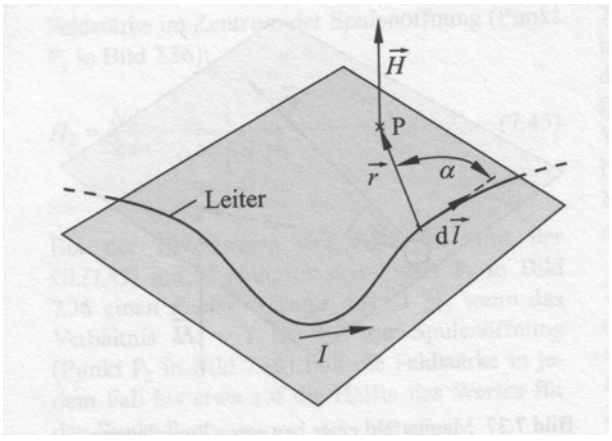


Der Feldstärkevektor $\vec{H}$ steht dabei sowohl senkrecht auf $\vec{v}$ wie auch auf $\vec{r}$. Stellt man das Produkt $v \cdot r \cdot \sin\alpha$ als Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{r}$ dar, ergibt sich das Gesetz von Biot-Savart:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{Q}{4\pi \cdot r^3} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{r}\right)}$$

Wir wollen nun keine einzelne Punktladung, sondern ein stromdurchflossenes Leiterelement der Länge $d\vec{l}$ betrachten. Darin bewegt sich die Ladung $dQ = I \cdot dt$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{l}/dt$. Im Punkt *P* ergibt sich nun der Anteil der magnetischen Feldstärke [2]:

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi \cdot r^3} \cdot \left(d\vec{l} \times \vec{r}\right)$$

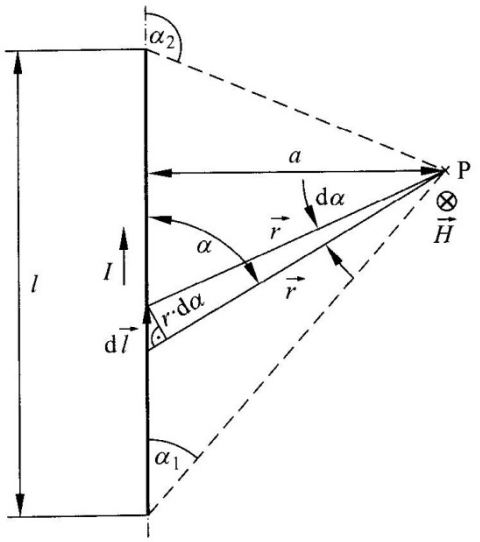


Betrachtet man nun wieder technisch wichtige Fälle, bei denen der Punkt *P* und der Leiter in einer Ebene liegen, so sind sämtliche Feldstärkeanteile $d\vec{H}$ senkrecht zu dieser Ebene gerichtet und die Feldstärke $\vec{H}$ lässt sich durch Integration der Anteile einfach berechnen:

$$\vec{H} = \int_l d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Betrag: $H = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{\sin\alpha}{r^2} \cdot dl$

9.3.2 Magnetfeld eines dünnen, geraden Leiters



Die Richtung der magnetischen Feldstärke ergibt sich nach der Rechten-Hand-Regel.

Der betrachtete Leiter hat vom Punkt *P* den Minimalabstand *a*. Ersetzt man in der Beziehung:

$$H = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{\sin\alpha}{r^2} \cdot dl$$

$\sin\alpha \cdot dl = r \cdot d\alpha$ und $r = \frac{a}{\sin\alpha}$, folgt für den Betrag der magnetischen Feldstärke:

$$H = \frac{I}{4\pi \cdot a} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \cdot d\alpha$$

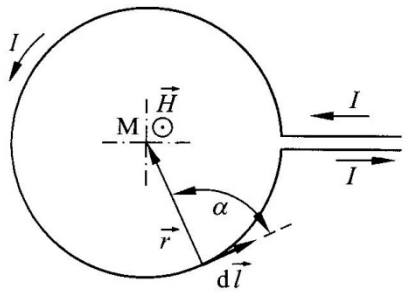
und damit die Lösung:

$$H = \frac{I}{4\pi \cdot a} \cdot \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

Für den unendlich langen Leiter (α_1 = 0°, α_2 = 180°) erhält man: $H = \frac{I}{2\pi \cdot a}$.

Dieses Ergebnis wurde bereits mit dem Durchflutungssatz hergeleitet (vgl. 9.2.3) [2].

9.3.3 Magnetfeld einer dünnen, kreisförmigen Leiterschleife



Beim Umfahren der Leiterschleife ist der Abstand *r* zum Mittelpunkt *M* stets konstant. Weiterhin ist der Winkel α = 90° ebenfalls konstant. Daher ergibt sich [2]:

$$H = \frac{I}{4\pi} \cdot \int_l \frac{\sin\alpha}{r^2} \cdot dl = \frac{I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \int_l dl = \frac{I}{4\pi \cdot r^2} \cdot 2\pi \cdot r$$

und es folgt: $H = \frac{I}{2r}$

9.4 Materie im Magnetfeld / Magnetische Eigenschaften der Stoffe

9.4.1 Physikalische Eigenschaften

Beim elektrischen Feld hat das Feld im atomaren Maßstab eine Wirkung auf die Materie. Gleichzeitig wird das Feld selbst durch diese Materie verändert. Dies gilt grundsätzlich auch für das magnetische Feld. Das magnetische Verhalten der Materie ist sehr komplex und ohne weiteres nicht geschlossen darstellbar. Wir beschränken uns daher hier auf eine grundlegende Beschreibung.

Diese Beschreibung geht davon aus, dass die magnetische Wirkung der Materie durch elektrische Kreisströme verursacht wird. Diese Kreisströme sind auf die Bewegung der Elektronen in den Atomen zurückzuführen. Diesen Kreisströmen können sog. Dipolmomente zugeordnet werden. Normalerweise sind in der Materie diese Dipolmomente in ihrer Orientierung regellos verteilt. Diese Dipolmomente haben damit keine Wirkung außerhalb der Materie. Wird nun diese Materie in ein vorhandenes magnetisches Feld gebracht, so findet eine Orientierung der Dipolmomente statt. Die Materie reagiert sozusagen auf das magnetische Feld.

Ist im Raum des magnetischen Feldes keine Materie vorhanden, dann sind die Verhältnisse noch recht einfach. Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte und der magnetischen Feldstärke *H* ergibt sich auf Grund der Gleichung:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

μ_0 ist die Permeabilität des freien Raumes (magnetische Feldkonstante).

Ist im Raum des magnetischen Feldes eine Materie vorhanden, so findet eine Orientierung der Dipolmomente statt. Diese Orientierung der Dipolmomente wird durch einen zusätzlichen Magnetisierungvektor *M* ausgedrückt:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

Man spricht hier auch von einer zusätzlichen Erregung des magnetischen Feldes in der Materie. Diese Erregung wird allein von der Materie aufgebracht und ist auch nur in ihr vorhanden. Mit der Definition der Magnetisierung existiert nun eine dritte Größe zu Beschreibung des Magnetfeldes in Materie. Um weiterhin nur mit den beiden Größen magnetische Flussdichte *B* und magnetische Feldstärke *H* arbeiten zu können, ist es notwendig, zwei weitere materialabhängige Größen zu definieren. Es sind dies die relative Permeabilität μ_r und die Suszeptibilität χ. Dabei ist die Magnetisierung *M* definiert als:

$$M = \chi \cdot H$$

Mit der Einführung der relativen Permeabilität folgt:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{H} + \chi \cdot \vec{H}\right) = \mu_0 \cdot \vec{H} \cdot (1 + \chi) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \qquad \text{also:} \quad \mu_r = 1 + \chi$$

Das Produkt von μ_0 und der relativen Permeabilität μ_r wird auch als absolute Permeabilität bezeichnet (vgl. 9.1.7).

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$$

9.4.2 Dia- und paramagnetische Stoffe

Für die meisten Stoffe gilt: $\mu_r \approx 1$

Diamagnetismus

Beispiele: Kupfer, Silber, Bismut, Blei, Wasser, Stickstoff, Glas

$$\mu_r < 1;\ \mu_r = 1 + \chi;\ |\chi| << 1$$

Bringt man einen diamagnetischen Stoff in ein homogenes Magnetfeld, das im Vakuum die magnetische Flussdichte B_0 aufweist, so stellt sich im Stoff ein Wert $B < B_0$ ein. Grund dafür ist, dass der diamagnetische Stoff zunächst keinerlei magnetische Eigenschaften aufweist. Dies gilt auch auf atomarer Ebene. Hier sind die Elektronen paarweise so angeordnet, dass sich die durch Kreisströme und den Spin der Elektronen hervorgerufenen magnetischen Wirkungen nach außen hin vollkommen aufheben.

Bei einer Änderung des äußeren Magnetfeldes werden in den Atomen zusätzliche Kreisströme induziert. Dies äußert sich in einer größeren oder kleineren Umlaufgeschwindigkeit der Elektronen um den Atomkern. Diese Kreisströme sind stets so gerichtet, dass sie ihrer Entstehung entgegen wirken, also die Änderung des äußeren Magnetfeldes aufzuheben versuchen (Lenz'sche Regel – 10.1.1).

Im diamagnetischen Stoff, der in ein äußeres Magnetfeld gebracht wird, überlagern sich das äußere und das von den induzierten Kreisströmen hervorgerufene Magnetfeld. Dadurch wird die magnetische Flussdichte im diamagnetischen Stoff verringert.

Paramagnetismus

Beispiele: Aluminium, Silizium. Platin, Wolfram, Tantal, Sauerstoff

$$\mu_r > 1;\ \mu_r = 1 + \chi;\ \chi << 1$$

Die Atome paramagnetischer Stoffe haben ein magnetisches Dipolmoment. In einem angelegten äußeren Feld sind sie bestrebt, sich in die Richtung dieses Feldes auszurichten. Diese Ausrichtung ist jedoch auf Grund der atomaren Temperaturbewegung nicht stabil; die Ausrichtung sämtlicher Atome eines paramagnetischen Stoffes kann bei Zimmertemperatur auch bei sehr starken Magnetfeldern nicht erreicht werden. Deshalb stellt sich nach außen nur ein äußerst schwacher magnetischer Effekt ein.

Die nachstehende Tabelle gibt einige Beispiele für diamagnetische und paramagnetische Stoffe mit den entsprechenden Werten für χ. Die Absolutwerte der Suszeptibilitäten χ sind äußerst klein. Bei paramagnetischen Stoffen sind sie um etwa eine Größenordnung größer.

Diamagnetische Stoffe		Paramagnetische Stoffe	
Stoff	Suszeptibilität χ	Stoff	Suszeptibilität χ
Bismut	$-157.000 \cdot 10^{-6}$	Flüssigsauerstoff	$3600.0 \cdot 10^{-6}$
Blei	$-15.900 \cdot 10^{-6}$	Platin	$256.0 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$-9.650 \cdot 10^{-6}$	Wolfram	$67.5 \cdot 10^{-6}$
Wasser	$-9.050 \cdot 10^{-6}$	Aluminium	$24.0 \cdot 10^{-6}$
Stickstoff	$-0.006 \cdot 10^{-6}$	Tantal	$18.2 \cdot 10^{-6}$
Wasserstoff	$-0.002 \cdot 10^{-6}$	Sauerstoff	$1.8 \cdot 10^{-6}$

9.4.3 Ferro- und ferrimagnetische Stoffe

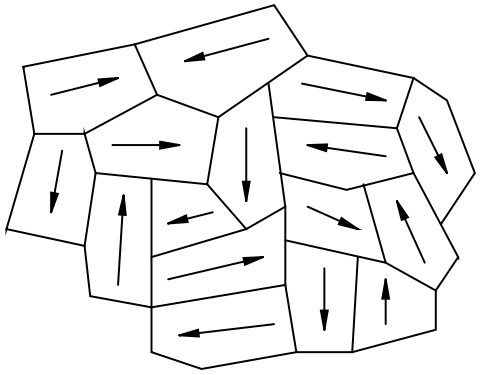
Ferromagnetismus

Die Moleküle dieser Stoffe sind magnetische Dipole, die sich unter dem Einfluss des magnetischen Feldes ausrichten und dieses verstärken. Ferromagnetismus gibt es nur bei Feststoffen, nicht bei Flüssigkeiten und Gasen, denn dies ist keine Eigenschaft der Atome, sondern der Kristallstrukturen fester Körper.

Ferromagnetische Stoffe: Eisen, Kobalt, Nickel

$$\mu_r = 10...10^5 \quad \text{(nicht konstant)}$$

Der Ferromagnetismus entsteht durch die gegenseitige Beeinflussung der Atome (sonst würde nur Paramagnetismus vorliegen). Dadurch sind jeweils 10^6 … 10^9 Elementarmagnete in sog. Weiss'schen Bezirken gleich ausgerichtet; damit ergibt sich ein besonders niedriger Energieinhalt des Stoffes. Die Elementarmagnete innerhalb der Weiss'schen Bezirke richten sich auch ohne äußeres Magnetfeld von selbst aus.



Weiss'sche Bezirke sind also Gebiete, in denen sich die molekularen Dipole in eine Vorzugsrichtung ausrichten. Insgesamt können sich diese Elementarmagnete in ihrer Wirkung gegenseitig kompensieren. Sie können aber auch überwiegend dieselbe Richtung haben, dann liegt ein Dauermagnet vor.

ungefähres Volumen : $10^{-1}...10^{-6}\,mm^3$
Kantenlänge : $10...500\,\mu m$

In einem ferromagnetischen Stoff, der nicht magnetisiert ist, ist die Ausrichtung der Weiss'schen Bezirke vollkommen regellos. Bringt man diesen Stoff in ein äußeres Magnetfeld, so verschieben sich zunächst die Trennwände zwischen den Weiss'schen Bezirken; diejenigen Weiss'schen Bezirke, deren Ausrichtung zufällig mit der Richtung des äußeren Magnetfeldes übereinstimmt, wachsen auf Kosten ihrer Nachbarbezirke an. Dies ist zunächst noch ein reversibler Vorgang.

Bei weiterer Steigerung der magnetischen Feldstärke *H* des äußeren Feldes treten irreversible Wandverschiebungen auf, wobei immer mehr Trennwände zwischen einzelnen Weiss'schen Bezirken verschwinden. Die magnetische Flussdichte *B* im ferromagnetischen Stoff steigt sehr stark an. Schließlich sind alle Weiss'schen Bezirke in Richtung des äußeren Magnetfeldes gedreht; diesen Zustand nennt man Sättigung.

Werden magnetisierte ferromagnetische Stoffe auf die so genannten Curie -Temperatur aufgeheizt, so führt die thermische Energie zu einer Bewegung der Moleküle, die stark genug ist, um die Orientierung der Bezirke aufzubrechen. Dadurch verliert der Stoff seine permanentmagnetischen Eigenschaften wieder.

Stoff	Formel	Curie-Temperatur in °C
Eisen	Fe	770
Kobalt	Co	1130
Nickel	Ni	358
Eisenoxid	Fe_2O_3	622

Antiferromagnetismus

Molekulare Magnetdipole sind zwar vorhanden, richten sich jedoch aufgrund des speziellen Kristallgitteraufbaus antiparallel aus, so dass sie sich in ihrer Wirkung nach außen hin aufheben.

Ferrimagnetismus

Antiparallel ausgerichtete molekulare Magnetdipole kompensieren sich nur teilweise; dadurch Überwiegen einer Vorzugsrichtung.

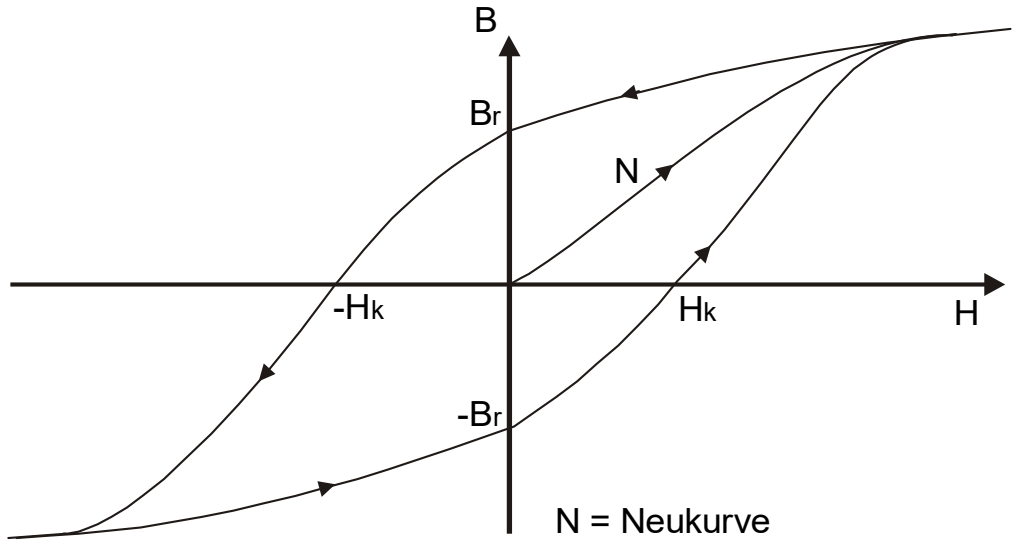
Ferrimagnetische Stoffe: Ferrite (Fe-, Mn-, Ni-, Zn-, Cu-, Mg- Oxyde, bei 1000...1400 Grad zusammengesintert)

$$\mu_r = 10^4 ... 10^6 \quad \text{(nicht konstant)}$$

Ferrimagnetische Stoffe verhalten sich im Wesentlichen wie ferromagnetische, der Zustand der Sättigung ist allerdings schon bei geringeren magnetischen Flussdichten erreicht.

9.4.4 Magnetisierungskennlinie

"Hysterese" – Kurve: *B*-*H* - Zusammenhang
nichtlinear, nicht eindeutig



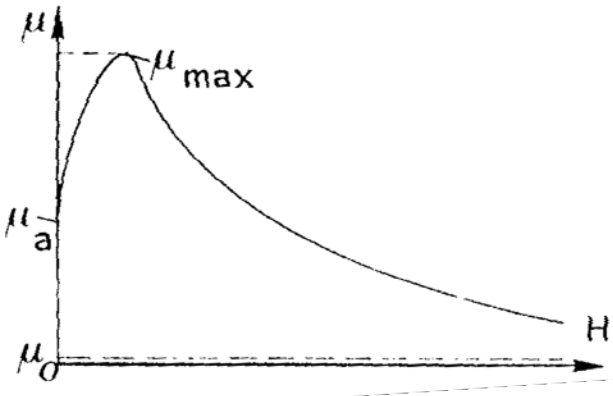
Ein Stück ferromagnetischen Materials wird in ein veränderbares Magnetfeld gebracht. Wird die magnetische Feldstärke bei Null beginnend erhöht, dann folgt die magnetische Flussdichte in dem Material zunächst der Neukurve. Der erste Anstieg ist steil. Danach flacht die Kurve ab. Wird nun die magnetische Feldstärke wieder reduziert, dann folgt die magnetische Flussdichte der oberen Kurve. Sie schneidet die Achse der magnetischen Flussdichte in dem Punkt B_r, der Remanenzinduktion genannt wird. Nun wird das Vorzeichen der magnetischen Feldstärke umgekehrt. Die Kurve der Flussdichte fällt weiter. Der Schnittpunkt mit der *H*-Achse wird Koerzitivfeldstärke H_k genannt.

Man erkennt, dass bei einem magnetischen Wechselfeld die beiden äußeren Äste der sog. „Hysterese"-Kurve durchlaufen werden. Diese Kurve schließt eine Fläche ein, die proportional zu den dabei entstehenden Hystereseverlusten ist (10.3.4).

Die absolute Permeabilität ist der Quotient *B* über *H*. Im Falle eines ferromagnetischen Materials sind relative und absolute Permeabilität keine Konstanten mehr.

$$\mu = \mu(H) \neq const$$

Das nebenstehende Diagramm zeigt einen typischen Verlauf der absoluten Permeabilität bei einem weichmagnetischen Werkstoff [2].



Fassen wir kurz zusammen:

Die Elementarmagnete richten sich mit wachsender Feldstärke aus.
Wenn alle Magnete ausgerichtet ⟶ Sättigung ⟶ $dB/dH = \mu_0$

Bei Abschalten des Stromes (genauer: Reduzierung der Feldstärke *H* auf Null):
Remanenz – Induktion B_r (remanere = übrigbleiben)

Um die Induktion zum Verschwinden zu bringen, benötigt man eine magnetische Feldstärke entgegengesetzter Polarität $-H_k$.
Koerzitiv – Feldstärke H_k (coercere = hindern)

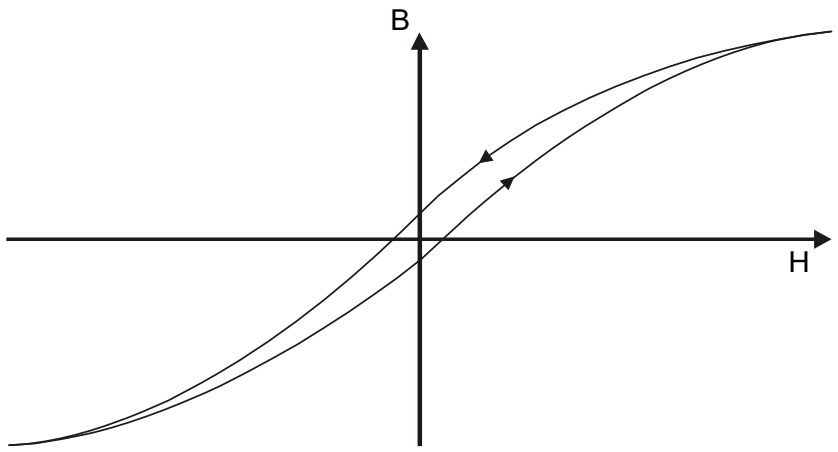
Die Induktion folgt der magnetischen Feldstärke mit einer zeitlichen Verzögerung:
Hysterese

Hartmagnetische Stoffe

breite Hysterese – Schleife, großes B_r, großes H_k
Für alle Anwendungen ohne Richtungswechsel geeignet, z.B. Dauermagnete, Ferrite.

Weichmagnetische Stoffe

schmale Hysterese – Schleife, kleines B_r, kleines H_k, daher leicht ummagnetisierbar



Für alle Anwendungen mit magnetischen Wechselfeldern geeignet (el. Maschinen, Transformatoren), z.B. Eisenbleche.

Bei weichmagnetischen Stoffen rechnet man oft näherungsweise mit einem eindeutigen B- H- Zusammenhang

9.5 Magnetischer Kreis

9.5.1 Beispiele für Magnetkreise

Viele Systeme zur Krafterzeugung beruhen auf der Anwendung des magnetischen Feldes. Die Berechnung von Kräften und Drehmomenten erfordert daher eine Berechnung der Größen des magnetischen Feldes. Dies kann zum einen mit Computerprogrammen geschehen, die zum Beispiel mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode die magnetische Flussdichte oder die magnetische Feldstärke berechnen können. Diese Berechnungsmethoden sollen hier in dieser Vorlesung nicht weiter besprochen werden.

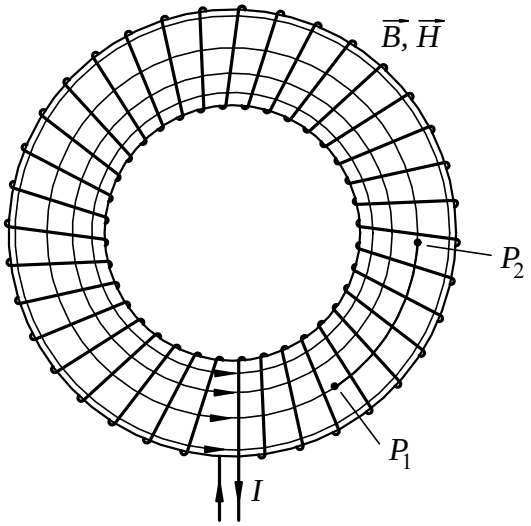
Eine weitere Möglichkeit ist die Anwendung von Vernachlässigungen, die dann zu einer recht einfachen analytischen Berechnung eines magnetischen Kreises führen. Bei dieser Methode kann man sich die von elektrischen Stromkreisen bekannten Berechnungsverfahren und Methoden zu Hilfe nehmen. Es werden magnetische Umlaufspannungen und magnetische Widerstände definiert. Der magnetische Fluss entspricht dem Strom in elektrischen Stromkreis.

Auf einen wesentlichen Unterschied zwischen einem Stromkreis und einem magnetischen Kreis soll an diese Stelle hingewiesen werden. Bei einem Stromkreis kann man auf Grund des großen Leitwertunterschiedes zwischen Nichtleiter und Leiter davon ausgehen, dass der Strom nur im Leiter geführt wird. Der Unterschied zwischen den Leitwerten von ferromagnetischen Materialien und der Luft ist dagegen nicht so groß. Teile des magnetischen Flusses werden sich daher in Luft schließen. Man bezeichnet diesen Fluss als sog. Streufluss.

Magnetische Kreise können wie Stromkreise Knoten und Maschen aufweisen. Ein einfacher Transformator kann z.B. durch einen magnetischen Kreis mit einer Masche dargestellt werden. Eine elektrische Maschine wird dagegen viele Knoten und Maschen haben. Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal ist der Luftspalt. Ein Transformator wird ohne Luftspalt realisiert. Eine elektrische Maschine muss einen Luftspalt zur Trennung von Rotor und Stator haben.

9.5.2 Elektrische Durchflutung und magnetische Spannung

Beispiel: Ringspule



Durchflutungssatz:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot I = \Theta$$

Θ = elektrische Durchflutung

Wenn man nur längs eines Teils des magnetischen Kreises integriert, wenn also das Integral kein Umlauf–Integral mehr ist, dann bezeichnet man das Ergebnis als:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{s} = V_{12}$$

V = magnetische Spannung

Einheit [Θ] = Einheit [V] = A

9.5.3 Magnetischer Fluss

In vielen Anordnungen (z.B. Ringspule) wird das Magnetfeld in einem ziemlich genau begrenzten Gebiet geführt. Alle Induktionslinien gehen durch dieses Gebiet hindurch. Naheliegend: Definition einer weiteren integralen Größe:

$$\boxed{\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}}$$

Φ: magnetischer Fluss

B ist ein Maß für die Dichte der Feldlinien
Φ ist ein Maß für die Anzahl der Feldlinien

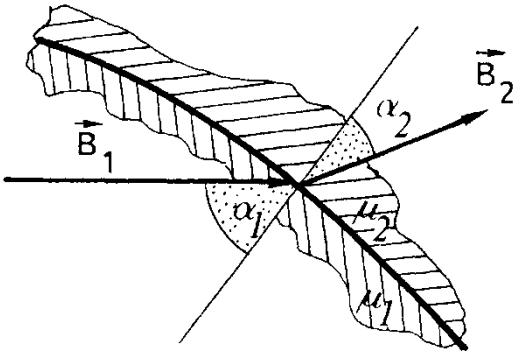
2 Namen für $\vec{B}$: $\vec{B}$ = Induktion
$\vec{B}$ = magnetische Flussdichte

$$\text{Einheit}\left[\Phi\right] = T \cdot m^2 = \frac{Vs}{m^2} \cdot m^2$$

$$\text{Einheit}\left[\Phi\right] = Vs = Wb\,(\text{Weber})$$

9.5.4 Magnetfeld an Grenzflächen

Im elektrischen Feld haben wir festgestellt, dass an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika mit verschiedenen Permittivitäten ε die Linien der elektrischen Feldstärke gebrochen werden. Analog dazu untersuchen wir nun die Feldlinien der magnetischen Flussdichte B an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit verschiedener Permeabilität [4, 5].



Der Vektor der magnetischen Induktion B_1 im Medium 1 in einem Punkt auf der Grenzfläche bilde mit der Normalen in diesem Punkt auf der Grenze den Winkel α_1. Betrag und Richtung des Vektors B_2 im Medium 2 im gleichen Punkt, das heißt auf der anderen Seite der Grenzfläche, werden verschieden von B_1 angenommen. Die beiden Vektoren werden je in eine Tangential- und in eine Normal-Komponente zerlegt. Zur Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Tangential- und der Normal-Komponenten beider Seiten stehen uns das Durchflutungsgesetz (9.2.1) und die Bedingung der Quellenfreiheit (9.2.2) zur Verfügung.

Mit Hilfe der Quellenfreiheit folgt, dass die Normal-Komponenten der magnetischen Flussdichte auf beiden Seiten gleich sind:

$$B_{n1} = B_{n_2}$$

Mit Hilfe des Durchflutungssatzes kann man ableiten, dass die Tangential-Komponenten der magnetischen Feldstärke ebenfalls gleich sein müssen:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \theta \qquad \Rightarrow \qquad H_{t1} = H_{t_2}$$

Ähnlich dem elektrischen Feld kann auch hier der Brechungswinkel mit Hilfe der absoluten Permeabilität auf beiden Seiten berechnet werden:

$$\tan\alpha_1 = \frac{B_{t_1}}{B_{n_1}} = \frac{\mu_1 \cdot H_{t_1}}{B_{n_1}} \qquad \tan\alpha_2 = \frac{B_{t_2}}{B_{n_2}} = \frac{\mu_2 \cdot H_{t_2}}{B_{n_2}}$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1 \cdot \cancel{H}_{t_1}}{\cancel{B}_{n_1}} \cdot \frac{\cancel{B}_{n_2}}{\mu_2 \cdot \cancel{H}_{t_2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

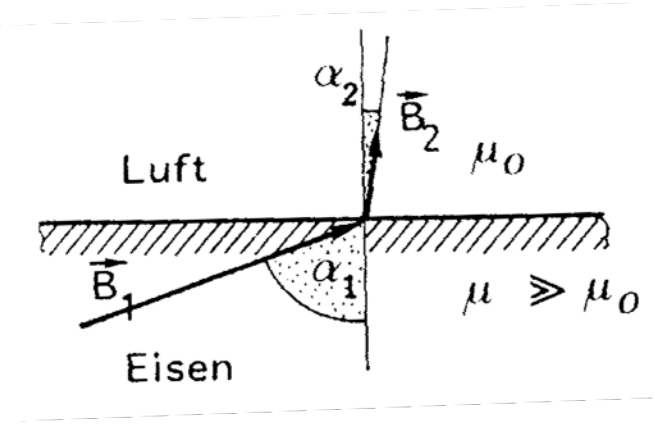
Als häufiger Anwendungsfall soll der Übergang des Magnetfeldes von Luft in Stahl betrachtet werden. Dieser Übergang ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die absolute Permeabilität sehr stark ändert. In Luft ist die absolute Permeabilität gleich der Naturkonstanten μ_0. In Eisen ist die absolute Permeabilität 1000-fach bis 5000-fach höher. Im Vergleich zur Permeabilität der Luft ist sie nahezu unendlich. Hieraus kann man, wie nachfolgend gezeigt, ableiten, dass der Austrittswinkel der Feldlinien an Luft ca. 90 ° beträgt [4, 5].

$$\tan\alpha_2 = \tan\alpha_1 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \approx 0$$

$$\alpha_2 \approx 0, \text{ weil } \frac{\mu_2}{\mu_1} \approx 0$$

$$H_{t_1} = H_{t_2} \Rightarrow \frac{B_{t_1}}{\mu_1} = \frac{B_{t_2}}{\mu_2}$$

$$\Rightarrow B_{t_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot B_{t_2} \rangle\rangle B_{t_2}$$



9.5.5 Magnetischer Widerstand und magnetischer Leitwert

Hauptsächlich werden die integralen Größen elektrische Durchflutung Θ und magnetischer Fluss Φ dann verwendet, wenn das Magnetfeld in Stoffen hoher Permeabilität (Eisen) geführt wird.

Beispiel:
Spule mit geschlossenem Eisenkern

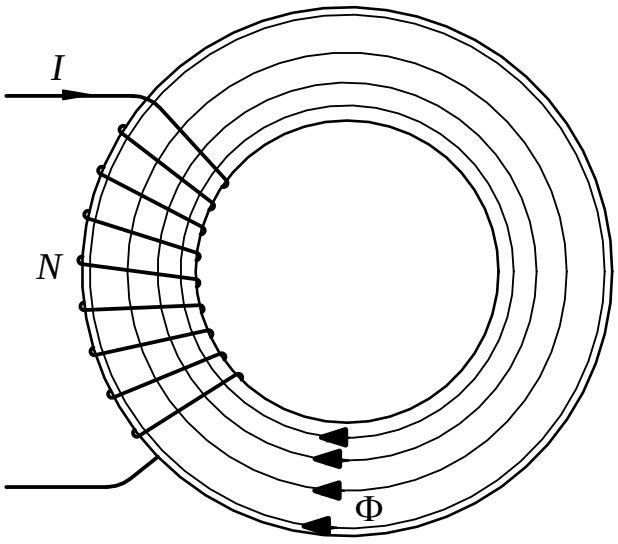
Rechnung mit mittleren Werten für *H* und B

l = mittlere Eisenweglänge

$$\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \Theta = H \cdot l \rightarrow H = \frac{\Theta}{l}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \Phi = B \cdot A \text{ mit } B = \mu \cdot H$$

$$\Phi = \frac{\mu \cdot A}{l} \cdot \Theta$$



Vergleich: An einen elektrischen Leiter der Länge *l*, der Leitfähigkeit κ mit dem Querschnitt *A* wird die Spannung U_0 angelegt $\rightarrow I = \frac{\kappa \cdot A}{l} \cdot U_0$

Man definiert in analoger Weise:

$$G = \frac{\kappa \cdot A}{l} \qquad \Lambda = \frac{\mu \cdot A}{l} \text{ magnetischer Leitwert}$$

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A} \qquad R_m = \frac{l}{\mu \cdot A} \text{ magnetischer Widerstand}$$

$$U_0 = R \cdot I \qquad \boxed{\Theta = R_m \cdot \Phi} \qquad \text{Einheit } [R_m] = \frac{A}{Vs}$$

Hopkinson'sches Gesetz des Magnetkreises (analog zum Ohm'schen Gesetz)

Knotenregel: $\sum I_\nu = 0 \quad \sum \Phi_\nu = 0$

Maschenregel: $\sum U_\nu = 0$ $\qquad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum V_\nu = \Theta$ $\qquad \sum V_\nu - \Theta = 0$

Der formale Unterschied bei der Maschenregel ist praktisch ohne Konsequenzen, wenn man im magnetischen Fall die elektrische Durchflutung Θ genauso berücksichtigt, wie eine eingeprägte Spannung U_0 im elektrischen Fall.

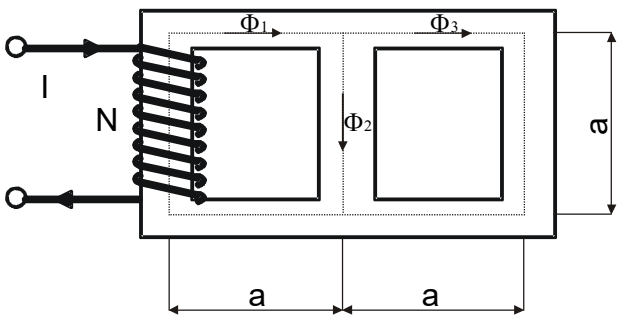
Analogien:

U_0	$\leftrightarrow$	Θ
U	$\leftrightarrow$	V
I	$\leftrightarrow$	Φ
R	$\leftrightarrow$	R_m
κ	$\leftrightarrow$	μ

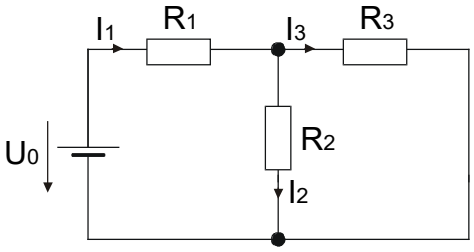
Mit diesen Analogien sind auch Spannungsteilerregel und Stromteilerregel auf magnetische Kreise übertragbar.

Beispiel:

Eisenquerschnitt A überall gleich



Elektrisches Analogon



$$\Phi_1 = \frac{\Theta}{R_{m1} + \frac{R_{m2} \cdot R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} \qquad I_1 = \frac{U_0}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$\Theta = N \cdot I; R_{m1} = \frac{3a}{\mu \cdot A}; R_{m2} = \frac{a}{\mu \cdot A}; R_{m3} = \frac{3a}{\mu \cdot A}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu \cdot A \cdot N \cdot I}{3a + \frac{a \cdot 3a}{a + 3a}} = \frac{\mu \cdot A \cdot N \cdot I}{3{,}75a} = \Phi_1$$

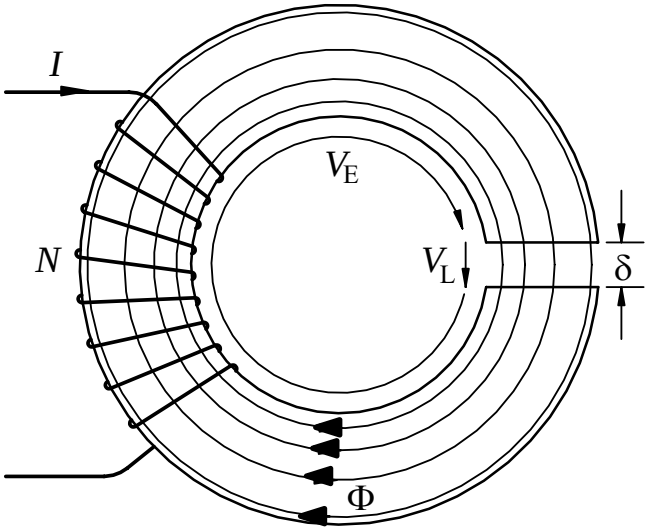
$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\frac{1}{R_{m2}}}{\frac{1}{R_{m2}} + \frac{1}{R_{m3}}} \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$\Phi_2 = \frac{\frac{\mu \cdot A}{a}}{\frac{\mu \cdot A}{a} + \frac{\mu \cdot A}{3a}} \cdot \frac{\mu \cdot A \cdot N \cdot I}{3{,}75a} = \frac{\mu \cdot A \cdot N \cdot I}{5a} = \Phi_2$$

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 \qquad I_3 = I_1 - I_2$$

$$\Phi_3 = \left(\frac{1}{3{,}75} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{\mu \cdot A \cdot N \cdot I}{a} = \frac{\mu \cdot A \cdot N \cdot I}{15a} = \Phi_3$$

9.5.6 Magnetischer Kreis mit Luftspalt



Bei bewegten magnetischen Kreisen (z.B. elektrischen Maschinen) wird der Eisenkern üblicherweise durch einen Luftspalt unterbrochen.

hier: Luftspaltlänge δ

$$\delta << l$$

l = Eisenweglänge ≈ Gesamtlänge

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum V_\nu = \Theta$$

$$\left(R_{mE} + R_{mL}\right) \cdot \Phi = \Theta$$

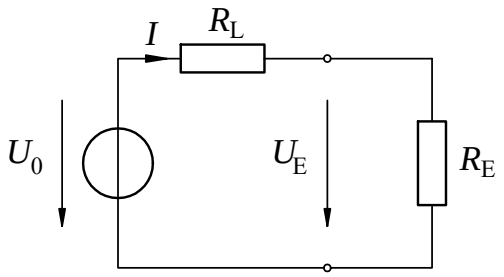
$$\left(\frac{l}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} + \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A}\right) \cdot \Phi = \Theta$$

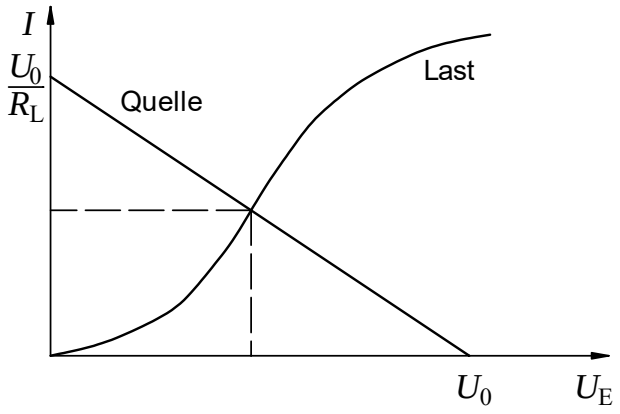
$\frac{l}{\mu_r} \approx \delta$ (von gleicher Größenordnung)

μ_r nicht konstant

$$\left(\frac{l}{\mu_r} + \delta\right) \cdot \frac{\Phi}{\mu_0 \cdot A} = \Theta$$

Elektrisches Analogon:



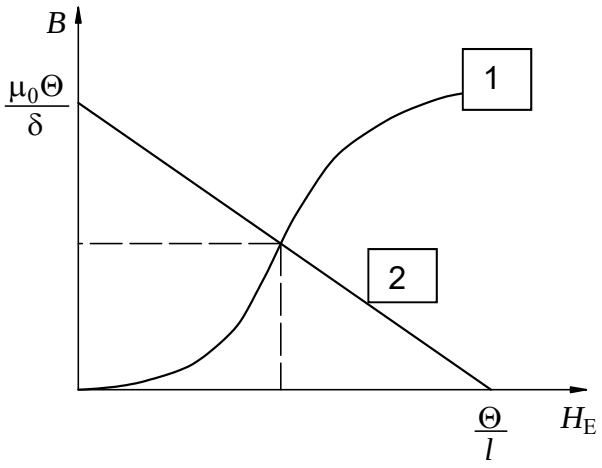


Widerstand R_E ist nicht linear; Lösung durch graphische Arbeitspunktbestimmung (2.6.2).

Für den magnetischen Kreis muss dieses Verfahren leicht abgewandelt werden, weil für Magnetwerkstoffe nicht der Zusammenhang $\Phi(V_E)$ sondern die Magnetisierungskennlinie $B(H_E)$ angegeben wird.

Beispiel:

Magnetisierungskennlinie für weichmagnetisches Material,
Hysterese vernachlässigt, Streuung am Luftspalt vernachlässigt



Ermittlung des Arbeitspunktes:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta$$

$$H_E \cdot l + H_L \cdot \delta = \Theta$$

$$H_E \cdot l + \frac{B}{\mu_0} \cdot \delta = \Theta$$

$$H_E = \frac{\Theta}{l} - \frac{\delta}{\mu_0 \cdot l} \cdot B$$

1. Dieser Zusammenhang zwischen *B* und H_E beschreibt die magnetischen Eigenschaften des Magnetwerkstoffes.

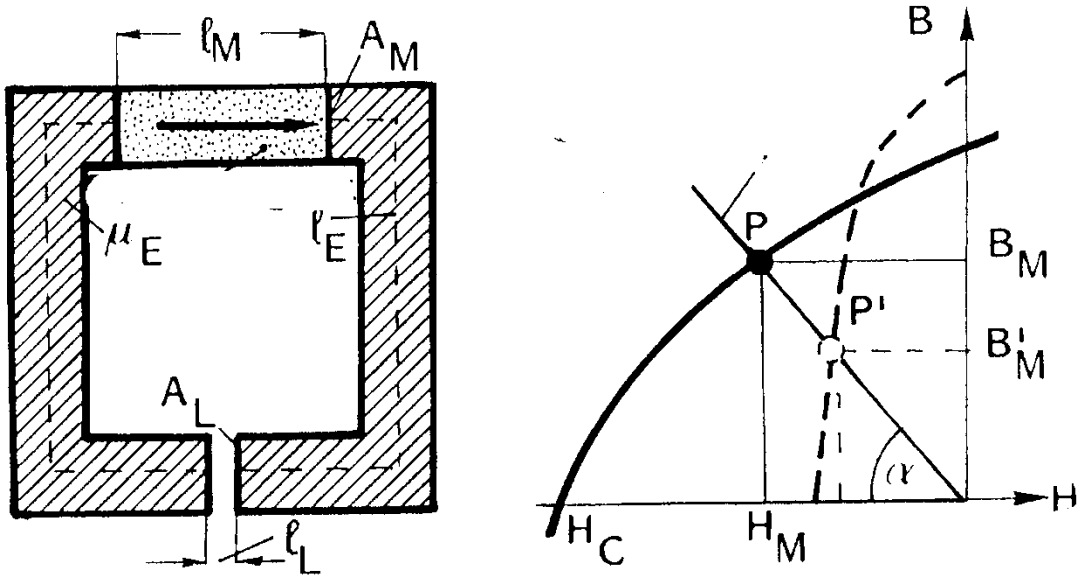
2. Dieser Zusammenhang zwischen *B* und H_E ergibt sich aus der elektrischen Durchflutung Θ und den geometrischen Abmessungen.

Arbeitspunkt ⟶ Schnittpunkt

9.5.7 Magnetkreise mit Permanentmagneten

Ein typischer Magnetkreis mit Permanentmagnet besteht aus dem Permanentmagneten selbst, einem ferromagnetischen Material zu Führung des magnetischen Flusses und einem Luftspalt, in dem ein Großteil der magnetischen Energie gespeichert ist. Der Magnet habe die Höhe l_M, die Länge des Eisenweges sei l_E, die Länge des Luftspaltes l_L. Die Querschnittsfläche sei im gesamten magnetischen Kreis konstant gleich A_M.

In Verbindung mit der Kennlinie des Magnetmaterials ist damit der Arbeitspunkt P des magnetischen Kreises vollständig definiert. Wie dieser Arbeitspunkt berechnet wird, soll in diesem Abschnitt gezeigt werden.



Wichtig ist, dass im magnetischen Kreis die Orientierungen der magnetischen Feldstärke *H* und der magnetischen Flussdichte *B* im Eisen und im Luftspalt gleich sind. Im Magneten dagegen sind diese beiden Größen entgegengesetzt gerichtet.

Der Durchflutungssatz für den magnetischen Kreis lautet:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \theta$$

Damit wird ein Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke eines Magnetkreises und der erregenden Durchflutung (Strom) angegeben. In dem hier gegebenen Magnetkreis ist jedoch kein Strom vorhanden. Die Anwendung des Durchflutungssatzes muss daher den Wert 0 ergeben. Bedingt durch den Dauermagneten ist jedoch eine magnetische Feldstärke im Magneten und außerhalb des Magneten vorhanden. Es muss daher gelten:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \vec{H}_a \cdot d\vec{s} + \int \vec{H}_i \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int \vec{H}_a \cdot d\vec{s} = -\int \vec{H}_i \cdot d\vec{s}$$

Man erkennt also, dass die magnetische Feldstärke in einem Magnetkreis mit Dauermagnet einen Vorzeichenwechsel erfährt. Bei einer positiven Orientierung der magnetischen Flussdichte *B* im Magneten ist die magnetische Feldstärke *H* in die negative Richtung orientiert.

Nun zur Berechnung des Magnetkreises. Der gesamte magnetische Spannungsabfall im Magnetkreis ergibt sich auf Grund des Durchflutungssatzes wie folgt:

$$H_M \cdot l_M + H_E \cdot l_E + H_L \cdot l_L = 0$$

Zur weiteren Vereinfachung geht man davon aus, dass auf Grund der großen relativen Permeabilität des Eisens die Feldstärke in Eisen praktisch vernachlässigt werden kann (diese Näherung ist sehr häufig zulässig):

$$H_M \cdot l_M + H_L \cdot l_L = 0$$

Die Kontinuität des Flusses kommt mit der folgenden Gleichung zum Ausdruck. Der Effekt der Streuung, welcher bei Magnetkreisen mit Dauermagneten häufig nicht vernachlässigt werden kann, wird durch den zusätzlichen Faktor k_s berücksichtigt. Dieser Faktor ist immer <1, was besagt, dass nur ein Teil des vom Dauermagneten erzeugten Flusses im Luftspalt zur Verfügung steht:

$$B_L \cdot A_L = k_s \cdot B_M \cdot A_M$$

Die Kombination der beiden Gleichungen ergibt die sog. Arbeitsgerade. Man erkennt, dass sie nur durch die Geometriedaten des Kreises bestimmt ist:

$$H_M = -H_L \cdot \frac{l_L}{l_M} = -k_s \cdot \frac{l_L}{l_M} \cdot \frac{A_M}{A_L} \cdot \frac{B_M}{\mu_0} \quad \text{bzw.} \quad B_M = -\frac{\mu_0}{k_s} \cdot \frac{l_M}{l_L} \cdot \frac{A_L}{A_M} \cdot H_M$$

Der Steigungswinkel dieser Arbeitsgeraden kann wie folgt berechnet werden:

$$\tan \alpha = \frac{B_M}{-H_M} = \frac{\mu_0}{k_s} \cdot \frac{l_M}{l_L} \cdot \frac{A_L}{A_M}$$

Für eine Bestimmung des exakten Arbeitspunktes des Magnetkreises muss nun die Kennlinie des verwendeten Magnetmaterials vorliegen. Bei heute sehr oft eingesetzten Materialien (Seltene Erden) ist die Kennlinie des Magneten linear. Die Berechnung des Schnittpunktes von Arbeitsgeraden und Magnetkennlinie ist in diesem Fall sehr einfach möglich.
Das Ziel der Optimierung eines Magnetkreises mit Permanentmagneten ist es, ein Maximum an Energiedichte in einem Luftspalt mit gegebenen Ausmaßen mit einem Permanentmagneten minimalen Volumens (Materialmenge) zu verwirklichen. Die Flussdichte im Luftspalt kann auf zwei Arten ausgedrückt werden:

$$B_L = k_s \cdot \frac{A_M}{A_L} \cdot B_M$$

$$B_L = \mu_0 \cdot \frac{l_M}{l_L} \cdot (-H_M)$$

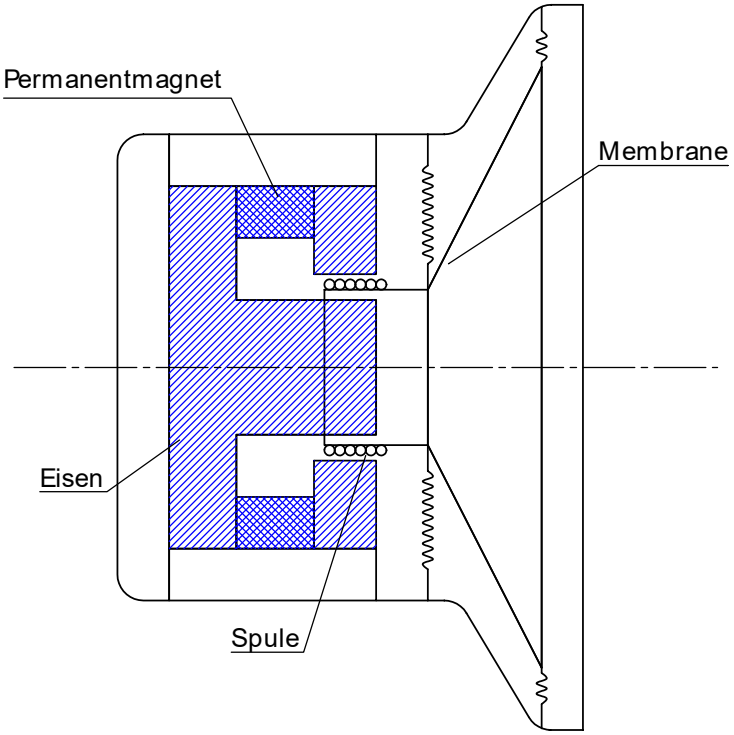
Durch die Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich:

$$B_L{}^2 = \mu_0 \cdot k_s \cdot \frac{l_M}{l_L} \cdot \frac{A_M}{A_L} \cdot B_M \cdot (-H_M) = \mu_0 \cdot k_s \cdot \frac{V_M}{V_L} \cdot B_M \cdot (-H_M)$$

Dieser Zusammenhang zeigt den Einfluss des Magnetvolumens V_M und des Luftspaltvolumens V_L sowie den Einfluss der Energiedichte des Magneten auf die Flussdichte im Luftspalt. Durch Betrachtung der Einheiten kann gezeigt werden, dass das Produkt $B \cdot H$ eine Energiedichte ist (10.3.2):

$$[B][H] = \frac{Vs}{m^2} \cdot \frac{A}{m} = \frac{Ws}{m^3}$$

Beispiele für Anwendungen von magnetischen Kreisen mit Permanentmagneten sind elektrische Maschinen, Drehspulinstrumente und Lautsprecher.



10. Zeitveränderliche Magnetfelder

10.1 Induktionsgesetz (Faraday's Law)

10.1.1 Induktionsvorgang und Lenz´sche Regel

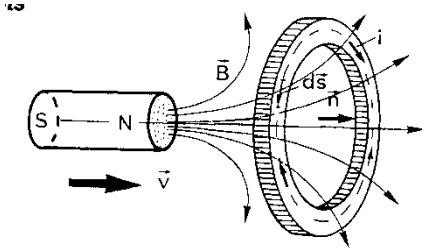
Die Experimente, die zur Erforschung des Induktionsvorganges durchgeführt wurden, verdanken wir in erster Linie dem Wissenschaftler Faraday. Er hat Experimente durchgeführt, bei denen er einen Dauermagneten mit einem Nord- und einem Südpol relativ zu einem ringförmigen elektrischen Leiter bewegte.

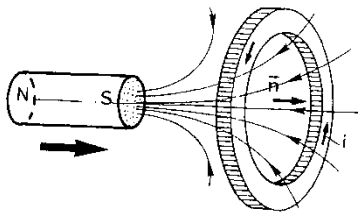
Das wesentliche Ergebnis dieser Experimente war, dass durch die Bewegung des Magneten eine Flussänderung in dem ringförmigen Leiter stattgefunden hat, die wiederum zu einer Induktion von Strömen in dem ringförmigen Leiter führte. Wesentlich dabei ist, dass der Induktionsvorgang nicht von der Intensität des Flusses selbst abhängt, sondern von der Flussänderung.

Die Definition des Flusses ist ja bekannt. Sie lautet wie folgt:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Bei diesen Experimenten kann nun der Nordpol oder der Südpol in Richtung des Ringes gerichtet sein. Es gilt die Definition, dass der Fluss dann positiv ist, wenn der Flächenvektor n und der Vektor der magnetischen Flussdichte B gleich orientiert sind. Im anderen Fall ist der Fluss negativ [4].





$$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \qquad \frac{d\Phi}{dt} < 0$$

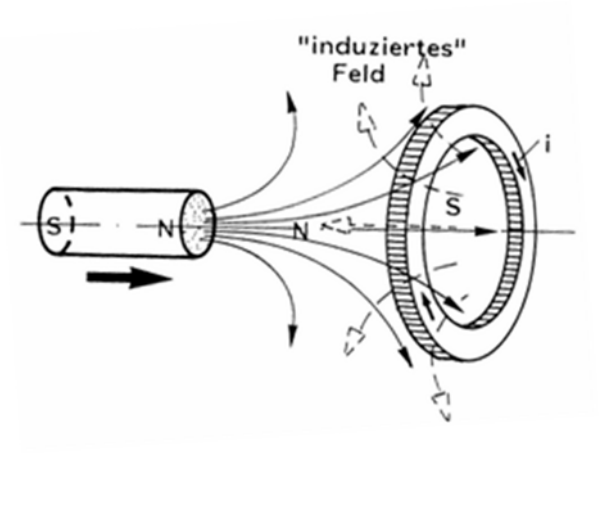
Wird nun der Magnet im linken Bild in Richtung des Ringes bewegt, so nimmt der Fluss offensichtlich zu, die Flussänderung ist also positiv. Der Fluss selbst auch. Wird nun der Magnet wieder vom Ring entfernt, so bleibt der Fluss selbst positiv, die Veränderung hingegen ist negativ, weil der Fluss abnimmt.

Im rechten Bild ist der Südpol des Magneten dem Ring zugewandt. Der Fluss selbst ist negativ. Wird der Magnet nun in Richtung des Ringes bewegt, ist die Flussänderung negativ, entfernt sich der Magnet wieder vom Ring ist die Flussänderung positiv.

Je nach Orientierungen des Magnetfeldes und der Bewegungsrichtung werden also in dem Ring eine Spannung und damit ein Strom induziert. Die Stromrichtung muss daher in den beiden Bildern auch unterschiedlich sein. Die Frage nach der Stromrichtung wird durch die sog. Lenz´sche Regel beantwortet.

Ein wesentliches Grundprinzip der Physik lautet: actio gleich reactio. Dieses Prinzip folgt zwangsläufig aus dem Energieerhaltungssatz. Wendet man nun dieses Grundprinzip auf den Vorgang der elektromagnetischen Induktion an, so kann man sich folgendes überlegen [4]:

Die Richtung des Stromes wird immer so sein, dass dieser Strom ein Magnetfeld erregt, welches der von außen vorgegebenen Änderung entgegenwirkt. Ist zum Beispiel die Flussänderung wie im nebenstehenden Bild gezeigt positiv, so wird das induzierte Feld des Stromes dem Feld des Dauermagneten entgegengerichtet sein. Würde der Strom in die andere Richtung fließen, so würde sich durch das Feld des Stroms das äußere Feld noch verstärken, das heißt die Flussänderung würde dadurch noch zunehmen. Dies würde wiederum zu einem größeren induzierten Strom führen usw…



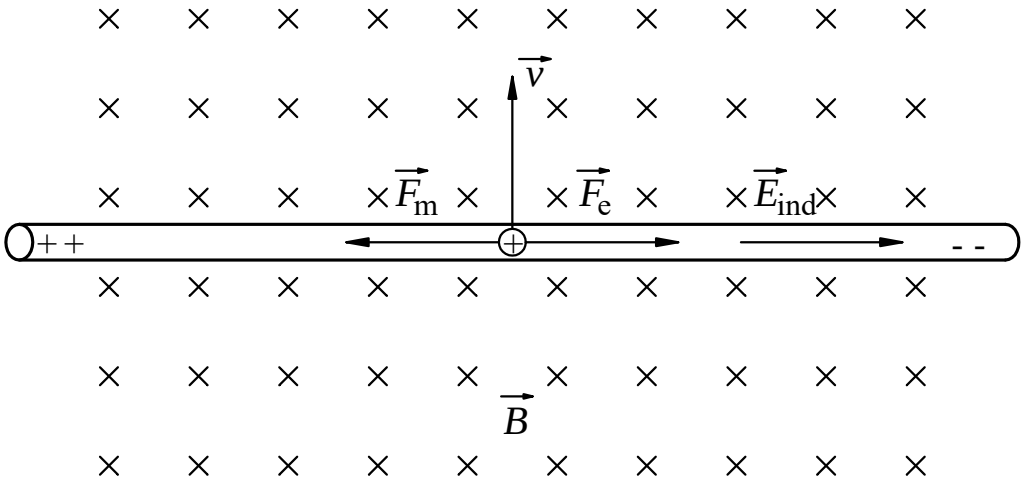
Die Energie im System würde also ohne äußeres Zutun nach einer einmaligen Anregung sich selbst erhöhen. Und dies ist gemäß dem Energieerhaltungssatz nicht möglich.

10.1.2 Berechnung der induzierten Spannung bei bewegtem Leiter

Die Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter haben wir bereits besprochen (9.1.3). Zum besseren Verständnis der Induktionsvorgänge werden wir hier die Kraftwirkung auf einzelne Ladungen berechnen. Es sei ein externes magnetisches Feld gegeben, über dessen Quelle wir an dieser Stelle nicht näher nachdenken müssen. Dieses Feld sei konstant. In diesem Feld bewege sich eine Ladung mit der Geschwindigkeit v.

Die Kraft auf die Ladung, die sog. Lorentz-Kraft F_m, ergibt sich aus dem Vektorprodukt der Geschwindigkeit v und des Magnetfeldes B mal der Ladungsmenge Q, die in dem Feld bewegt wird.

Wir wenden nun diese Lorentz-Kraft auf alle Ladung an, die sich in einem bewegten Leiter befinden. Dieser Leiter bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v senkrecht zu einem konstanten Magnetfeld. Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir an, das Magnetfeld im betrachteten Raum soll homogen sein.



Wie in dem Bild gezeigt, findet in dem Leiter eine Ladungstrennung statt. Bedingt durch die Lorentz-Kraft werden die negativen Ladungen, die freien Elektronen des Leiters, an das rechte Ende des Leiters verschoben. Auf der linken Seite des Leiters ergibt sich somit eine positive Ladung.

Auf die Ladungen wirkt die Lorentz-Kraft $\vec{F}_m = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Dies führt zu der beschriebenen Verschiebung der Elektronen auf die rechte Seite des Leiters. Auf Grund der beiden nun vorhandenen Ladungsbereiche bildet sich zwischen diesen Ladungsbereichen eine Coulomb‘sche Kraft aus, welche der Lorentz-Kraft entgegenwirkt: $\vec{F}_e = Q \cdot \vec{E}_{ind}$

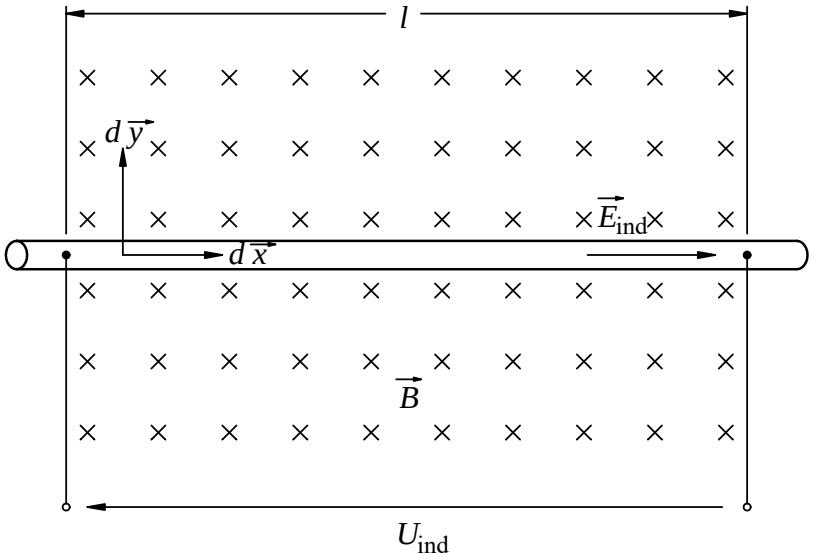
Im stationären Zustand werden sich diese beiden Kräfte gegenseitig aufheben:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$$
$$Q \cdot \vec{E}_{ind} + Q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = 0$$

Man erkennt an dieser Gleichung, dass es für die elektrische Feldstärke $\vec{E}_{ind}$ ein Äquivalent gibt, welches durch das Kreuzprodukt der Geschwindigkeit und der magnetischen Flussdichte definiert ist. Diese elektrische Feldstärke wird induzierte elektrische Feldstärke genannt: $\vec{E}_{ind} = -\vec{v} \times \vec{B}$

Die zugehörige elektrische Spannung berechnen wir über das Linienintegral:

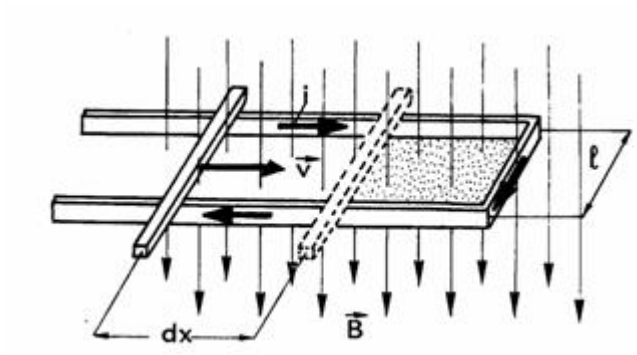
$$u_{ind} = \int_0^P \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{x} = -\int_0^P \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{x}$$



Stehen die beiden Vektoren Geschwindigkeit und magnetische Flussdichte senkrecht aufeinander, dann vereinfacht sich die Berechnung der induzierten Spannung (wobei *l* die effektive Länge des Leiters ist):

$$u_{ind} = -v \cdot B \cdot l$$

Bei dieser Herleitung der induzierten Spannung wurde der Begriff des magnetischen Flusses noch nicht benötigt. Einzig erforderlich war die Geschwindigkeit des Leiters *v*, dessen Länge *l* und die magnetische Flussdichte *B*. Betrachtet man nun diesen Leiter als Teil eines geschlossenen Kreises, dann lässt sich eine weitere Berechnungsweise für die induzierte Spannung ableiten.



In diesem Bild ist der Leiter ein Verbindungselement in einer Gleitschienen-Anordnung. Der Leiter sei frei beweglich. Er bewege sich mit einer Geschwindigkeit *v*. Durch diese Leiterschleife ist eine Fläche definiert, auf die nun die Definition des magnetischen Flusses angewendet werden kann [4].

Die Geschwindigkeit des Leiters und dessen Länge ergeben zusammen die Flächenänderung dieser Leiterschleife. Es gilt daher:

$$u_{ind} = -v \cdot B \cdot l = -\frac{dx}{dt} \cdot B \cdot l = -B \cdot \underbrace{l \cdot \frac{dx}{dt}}_{\frac{dA}{dt}} = -B \cdot \frac{dA}{dt}$$

Mit der Definition des magnetischen Flusses folgt:

$$\boxed{u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Induktionsgesetz (Faraday's Law)

Die Zählpfeilrichtung der induzierten Spannung ist rechtsschraubig zum Zählpfeil des Feldes (siehe 10.1.1)

> Die in einer Leiterschleife induzierte Spannung ist gleich der zeitlichen Abnahme des durch sie hindurchtretenden magnetischen Flusses.

Das Induktionsgesetz gilt allgemein, gleichgültig wodurch die Flussänderung bewirkt wird.

Der induzierte Strom ist so gerichtet, dass er seiner Ursache, also der Abnahme des magnetischen Flusses, entgegenwirkt.

Allgemein gilt:

> Induzierte Spannungen und Ströme haben eine solche Richtung, dass sie der Ursache ihrer Entstehung entgegenwirken (Lenz'sche Regel)

10.1.3 Ruhender Leiter im zeitvarianten Magnetfeld

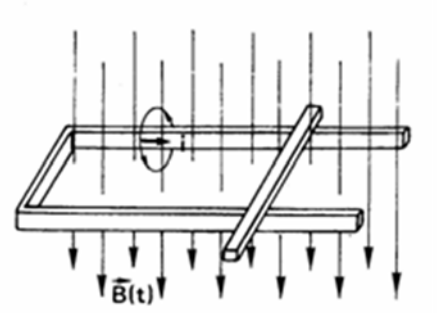
Im obigen Beispiel (10.1.2) hatten wir das Magnetfeld als zeitlich konstant angenommen. Die Flussänderung geschah durch die Änderung der Fläche der Leiterschleife. In diesem Abschnitt werden wir uns mit einer Flussänderung beschäftigen, die durch eine Änderung des Magnetfeldes hervorgerufen wird. Dieses Beispiel entspricht den Verhältnissen, wie sie zum Beispiel bei einem Transformator vorliegen.

Die Lage der Leiterschleife ist konstant, das externe Magnetfeld ist eine Funktion der Zeit. Der Fluss in der Leiterschleife berechnet sich daher mit der Formel:

$$\Phi(t) = B(t) \cdot A$$

In diesem Fall ist die induzierte Spannung direkt der Änderungsrate der magnetischen Flussdichte proportional [4]:

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -A \cdot \frac{dB}{dt}$$



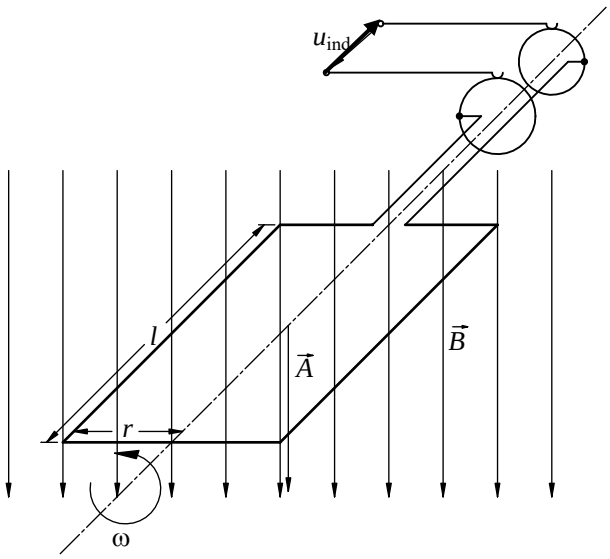
Ein Transformator wird üblicherweise nicht mit einer einzigen Leiterschleife realisiert, sondern mit einer Vielzahl von Windungen. In diesem Fall spricht man nicht von dem Fluss der Leiterschleife sondern von der Flussverkettung einer Spule mit *N* Windungen:

$$\Psi = N \cdot \Phi$$

Das Induktionsgesetz lautet in diesem Fall wie folgt:

$$u_{ind} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

10.1.4 Rotation einer Leiterschleife im Magnetfeld



Die rechtwinklige Leiterschleife mit dem Querschnitt $A = 2r \cdot l$ rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, die senkrecht zum magnetischen Feld angeordnet ist. Die induzierte Spannung u_{ind} wird an zwei gleitenden Kontakten aufgenommen. Der untere Teil der Abbildung zeigt einen Querschnitt der Leiterschleife.

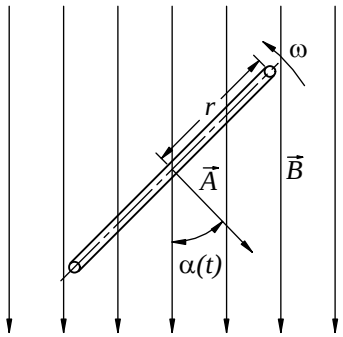
Wir gehen von einem scharf begrenzten homogenen Magnetfeld aus.

Der die Leiterschleife durchsetzende magnetische Fluss ist:

$$\Phi = B \cdot l \cdot 2 \cdot r \cdot \cos(\alpha)$$

Gleichförmige Rotation: $\alpha = \omega \cdot t$

$$\Phi = B \cdot l \cdot 2 \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



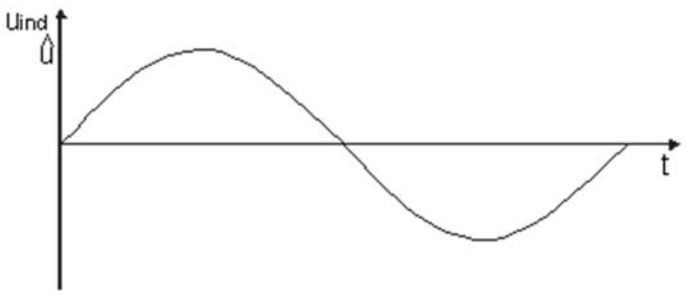
In die Leiterschleife wird eine Spannung induziert.

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$u_{ind} = -B \cdot l \cdot 2 \cdot r \cdot (-\omega \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

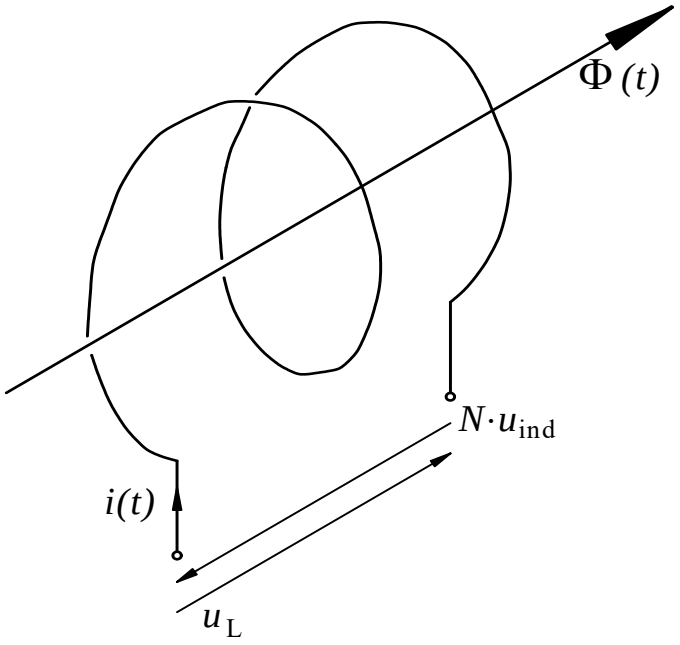
$$u_{ind} = 2 \cdot r \cdot \underbrace{l \cdot B \cdot \omega}_{\hat{u}} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$u_{ind} = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



10.2 Induktivität

10.2.1 Selbstinduktivität



Wenn mehrere hintereinander-geschaltete Leiterschleifen (eine Spule) von demselben zeitlich veränderlichen Fluss $\Phi(t)$ durchsetzt werden, dann wird in jeder Windung die Spannung induziert:

$$u_{ind.} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

insgesamt also:

$$u_{ind,ges} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Vor allem in der Energietechnik wird dieser Sachverhalt häufig so beschrieben:

Spule mit N Windungen, Querschnittsfläche A, spannt N–mal die Fläche A auf, die jedesmal vom Fluss Φ durchsetzt wird. Der insgesamt wirksame Fluss, der sog. verkettete magnetische Fluss Ψ beträgt also:

$$\Psi = N \cdot \Phi \qquad \text{und} \qquad u_{ind,ges} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Um einen magnetischen Fluss $\Phi(t)$ zu erzeugen, genügt es, einen Wechselstrom (in der eingezeichneten Richtung) durch die Spule zu schicken. Zu einer Spule (passives Bauelement) passt besser das Verbraucher–Zählpfeilsystem (die Bezugspfeile der Spannung u_L und des Stroms i zeigen in die gleiche Richtung)
→ Einführung der Spannung $u_L = -u_{ind,ges}$:

$$u_L = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(N \cdot \Phi\right) \qquad \Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{N \cdot i}{R_m}$$

$$u_L = \frac{d}{dt}\left(\frac{N^2}{R_m} \cdot i\right)$$

$$\underline{\underline{u_L = \frac{d}{dt}\left(L \cdot i\right)}} \qquad \boxed{L = \frac{N^2}{R_m}} \quad \text{Selbstinduktivität}$$

Ist der magnetische Widerstand $R_m = f(i)$, weil die relative Permeabilität μ_r des Kernmaterials von der magnetischen Feldstärke abhängt, dann ist wegen $i = f(t)$ auch $L = f(t)$.

$$\frac{d}{dt}(N \cdot \Phi) = \frac{d}{dt}(L \cdot i) \quad \text{und damit:} \qquad \underline{\underline{N \cdot \Phi = L \cdot i}} \quad + k$$

Die Integrationskonstante *k* muss Null sein, denn wenn $\Phi = 0$ gilt auch $i = 0$.

Damit gibt es eine zweite Definition der Selbstinduktivität, die auf Feldgrößen beruht:

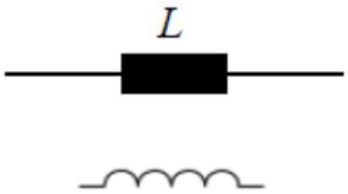
$$L = \frac{N \cdot \Phi}{i}$$

Im anderen Fall, also bei $R_m \neq f(i)$ z.B. Luftspule (vgl. Abs. 5):

$$\underline{\underline{u_L = L \cdot \frac{di}{dt}}}$$

$$\text{Einheit}\,[L] = \frac{Vs}{A} = H \text{ (Henry)}$$

Schaltzeichen in Schaltplänen



DIN EN 60617-4

Halten wir also fest:

- Die Induktivität ist ein Integralparameter des magnetischen Feldes, ähnlich wie die Kapazität beim elektrischen Feld.

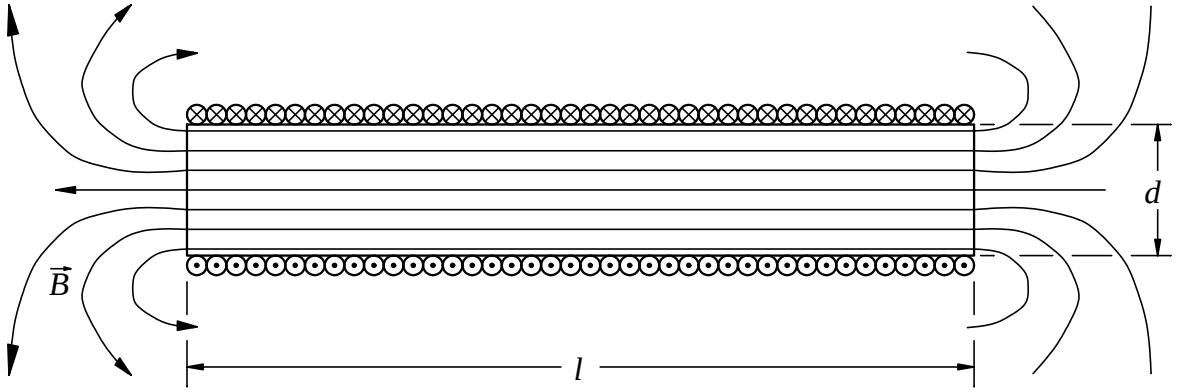
- Die Induktivität gibt damit an, welche Flussverkettung ein gegebener Spulenstrom in der Spule selbst hervorruft. Diese Gleichung kann auch als Berechnungsvorschrift zur Berechnung einer Induktivität verwendet werden. Diese Berechnung ist besonders dann sinnvoll, wenn man mit Hilfe eines numerischen Programms zur Berechnung von magnetischen Feldern den Fluss der Spule sehr genau berechnen kann.

  $$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N \cdot \Phi}{i}$$

- Die Induktivität einer Spule ist proportional dem Quadrat der Windungszahl dieser Spule. Weiter ist die Induktivität bestimmt durch das Umfeld in dem sich das Magnetfeld der Spule befindet. Dies wird durch den magnetischen Widerstand R_m ausgedrückt. So bedeutet z.B. ein Luftspalt in einem Magnetkreis eine deutliche Vergrößerung des magnetischen Widerstandes und damit eine Reduzierung der Induktivität.

  $$L = \frac{N \cdot \Phi}{i} = N^2 \cdot \Lambda = \frac{N^2}{R_m}$$

10.2.2 Selbstinduktivität der langen Zylinderspule



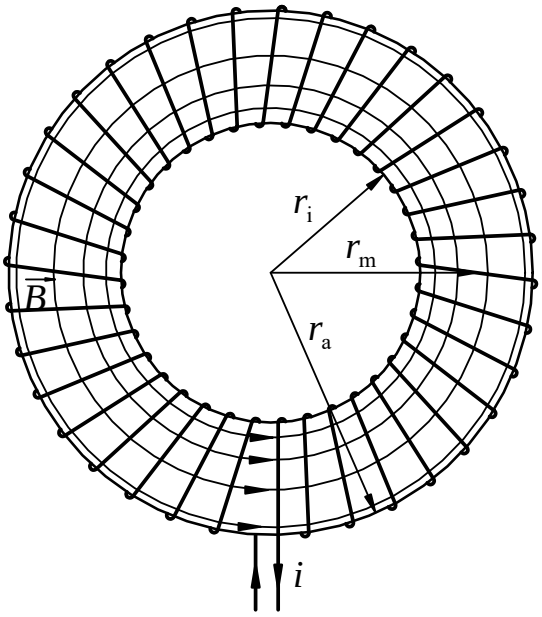
Der magnetische Widerstand des Außenraumes ist gegenüber dem des Spulenkerns vernachlässigbar klein (vgl. Abs.9.2.6)

"lang" $\Rightarrow l >> d$

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad \text{mit} \quad R_m \approx \frac{l}{\mu \cdot A}$$

$$\underline{\underline{L \approx N^2 \cdot \mu \cdot \frac{A}{l}}}$$

10.2.3 Selbstinduktivität der langen Ringspule ohne Luftspalt



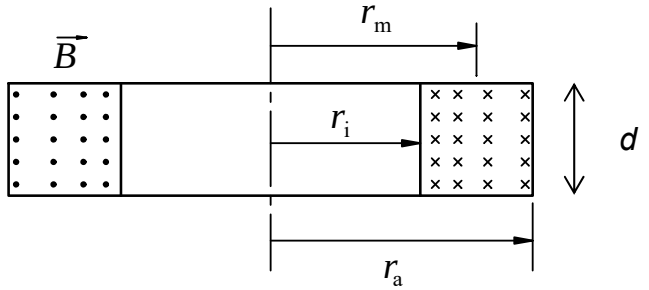
a) Näherungsrechnung

$$r_i \approx r_a \approx r_m = \frac{r_a + r_i}{2}$$

Die lange Ringspule kann als gebogene, an ihren Enden zusammengesetzte lange Zylinderspule ohne Außenraum angesehen werden:

$$L \approx N^2 \cdot \mu \cdot \frac{A}{2\pi \cdot r_m} \text{ mit } A = (r_a - r_i) \cdot d$$

$$\underline{\underline{L \approx N^2 \cdot \mu \cdot \frac{d}{\pi} \cdot \frac{r_a - r_i}{r_a + r_i}}}$$



b) Exakte Rechnung

$$\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi \cdot r \qquad L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 \cdot \Phi}{\Theta}$$

$$\rightarrow H = \frac{\Theta}{2\pi \cdot r}$$

$$\Phi = \int_A B \cdot dA = \int_{r_i}^{r_a} \mu \cdot H \cdot d \cdot dr$$

$$\Phi = \mu \cdot d \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{\Theta}{2\pi \cdot r} \cdot dr$$

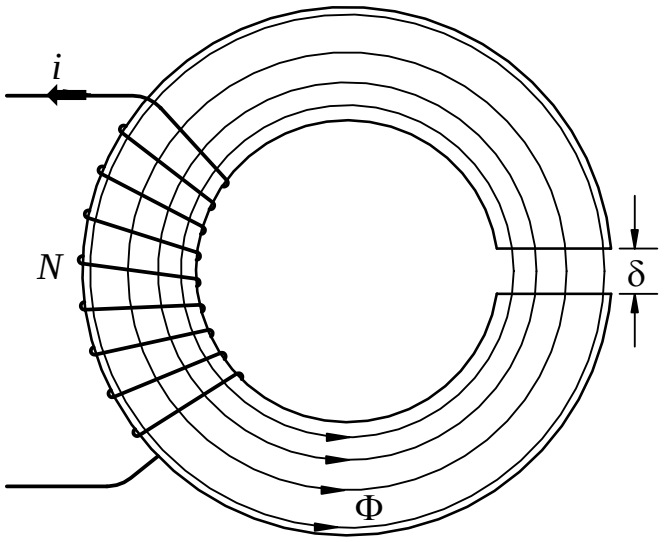
$$\Phi = \mu \cdot d \cdot \frac{\Theta}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \qquad \underline{\underline{L = N^2 \cdot \mu \cdot \frac{d}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}}$$

Die Näherungslösung führt zu etwas zu kleinen Ergebnissen.
Die Abweichung ist < 4%, wenn r_a/r_i < 2 ist.

10.2.4 Selbstinduktivität der langen Ringspule mit Luftspalt

Eine exakte Rechnung ist nicht mehr möglich; wegen der guten Ergebnisse der Näherungsrechnung aber auch nicht mehr erforderlich. Die Rechnung ist deswegen nur näherungsweise richtig, weil der magnetische Widerstand so berechnet wird, als ob das magnetische Feld homogen wäre. Für die Länge *l* wird dabei in der Regel die Länge der Mittellinie eingesetzt.

Gerechnet wird mit: - mittleren Eisenweglängen
- mittlerer Weglänge
- $B_L = B_E$ (d.h. unter Vernachlässigung der Streuung am Luftspalt)



Ausgangsgleichung:

$$L = \frac{N^2}{R_m}$$

Analog zum elektrischen Widerstand:

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A} \rightarrow R_m = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

Der gesamte magnetische Widerstand des magnetischen Kreises ergibt sich zu:

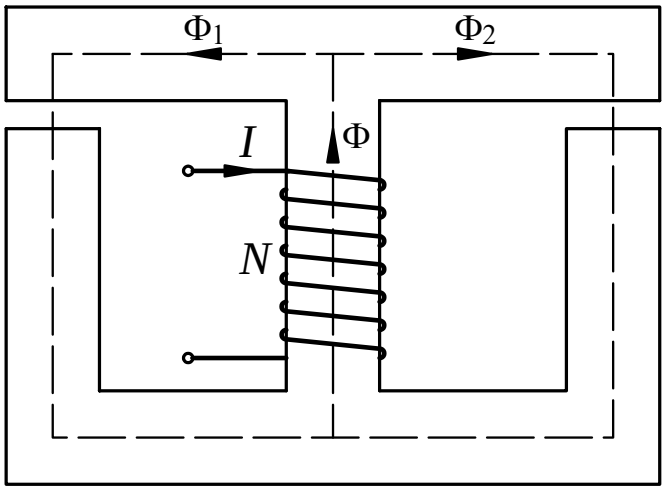
$$R_m = R_{mE} + R_{mL}$$

$$R_m = \frac{l}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} + \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A} = \frac{1}{\mu_0 \cdot A} \cdot \left(\frac{l}{\mu_r} + \delta \right)$$

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{\frac{l}{\mu_r} + \delta}$$

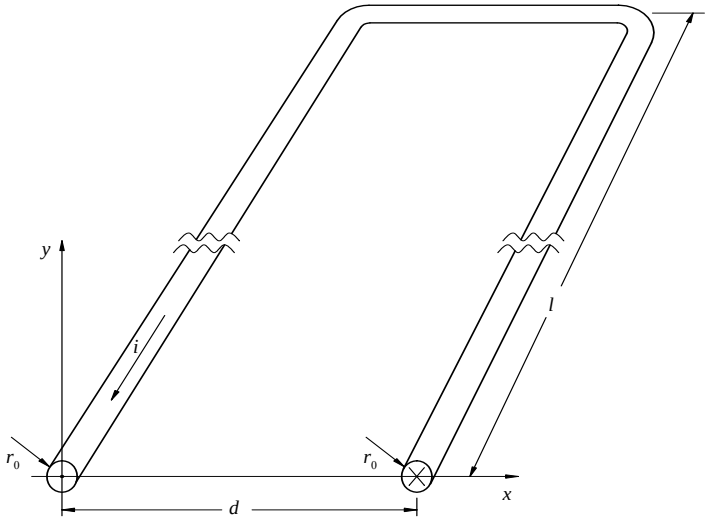
Dieses Verfahren zur Ermittlung der Induktivität über den magnetischen Widerstand ist auch bei komplizierterer Struktur des Eisenkerns anwendbar (siehe Übungsaufgaben).

Auch in der Praxis werden so magnetische Eisenkreise und deren Induktivität berechnet (hier ein dreischenkliger Eisenkern mit Luftspalten in den äußeren Schenkeln).



10.2.5 Selbstinduktivität der langen Doppelleitung

Wir berechnen zunächst nur das Magnetfeld zwischen den beiden Leitern der Doppelleitung. Daraus kann die sog. äußere Induktivität berechnet werden.



Äußere Induktivität L_a

$L \approx L_a$, wenn $d >> r_0$

$L_a \cdot i = N \cdot \Phi_a$ hier: $N = 1$

$$L_a = \frac{\Phi_a}{i}$$

In der Ebene $y = 0$ hat das Magnetfeld nur eine y - Komponente:

$$H = H_y = \frac{i}{2\pi \cdot x} + \frac{i}{2\pi \cdot (d - x)}$$

Für den äußeren Fluss senkrecht zur Leiterebene folgt daraus:

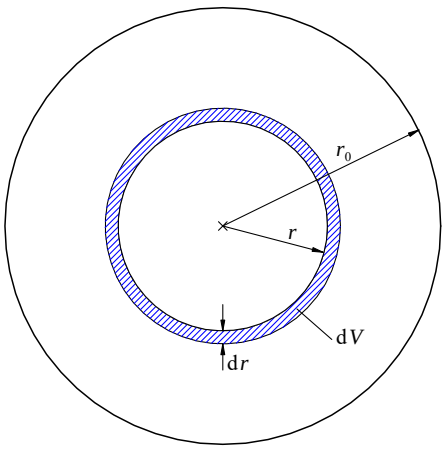
$$\begin{aligned}
\Phi_a &= \int B \cdot dA = \int_{x=r_0}^{d-r_0} \mu_0 \cdot H \cdot l \cdot dx \\
\Phi_a &= \int_{x=r_0}^{d-r_0} \mu_0 \cdot l \cdot \frac{i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \cdot dx \\
\Phi_a &= \frac{\mu_0 \cdot l \cdot i}{2\pi} \cdot \left[\ln(x) - \ln(d-x) \right]_{r_0}^{d-r_0} \\
\Phi_a &= \frac{\mu_0 \cdot l \cdot i}{2\pi} \cdot \left[\ln(d-r_0) - \ln(r_0) - \ln(r_0) + \ln(d-r_0) \right] \\
\Phi_a &= \frac{\mu_0 \cdot l \cdot i}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0} \right)
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L_a = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d-r_0}{r_0} \right) \approx \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d}{r_0} \right)}}$$

Man kann die Induktivität einer Doppelleitung verringern, indem man den Abstand verringert:

$$d \to 2r_0 \;\to\; L_a = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot r_0 - r_0}{r_0} \right) = 0$$

Da sich auch innerhalb des Leiters ein magnetisches Feld befindet, gibt es zusätzlich zur äußeren auch eine innere Induktivität. Zur Berechnung der inneren Induktivität wird das Konzept der Energiedichte benötigt (Abs.10.3.2)



$$\begin{aligned}
W_m &= \int w_m \cdot dV \\
\frac{1}{2} L \cdot i^2 &= \int_0^{r_0} \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 \cdot l \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr
\end{aligned}$$

$$H = \frac{i \cdot r}{2\pi \cdot r_0^{\,2}}$$

$$\begin{aligned}
L \cdot i^2 &= \int_0^{r_0} \mu \cdot l \cdot 2\pi \cdot r \cdot \frac{i^2 \cdot r^2}{(2\pi)^2 \cdot r_0^{\,4}} \cdot dr \\
L &= \frac{\mu \cdot l}{2\pi \cdot r_0^{\,4}} \cdot \int_0^{r_0} r^3 \cdot dr = \frac{\mu \cdot l}{8\pi}
\end{aligned}$$

Für einen Draht der Gesamtlänge $2 \cdot l$ (Hin- und Rückleiter) ergibt sich eine innere Induktivität:

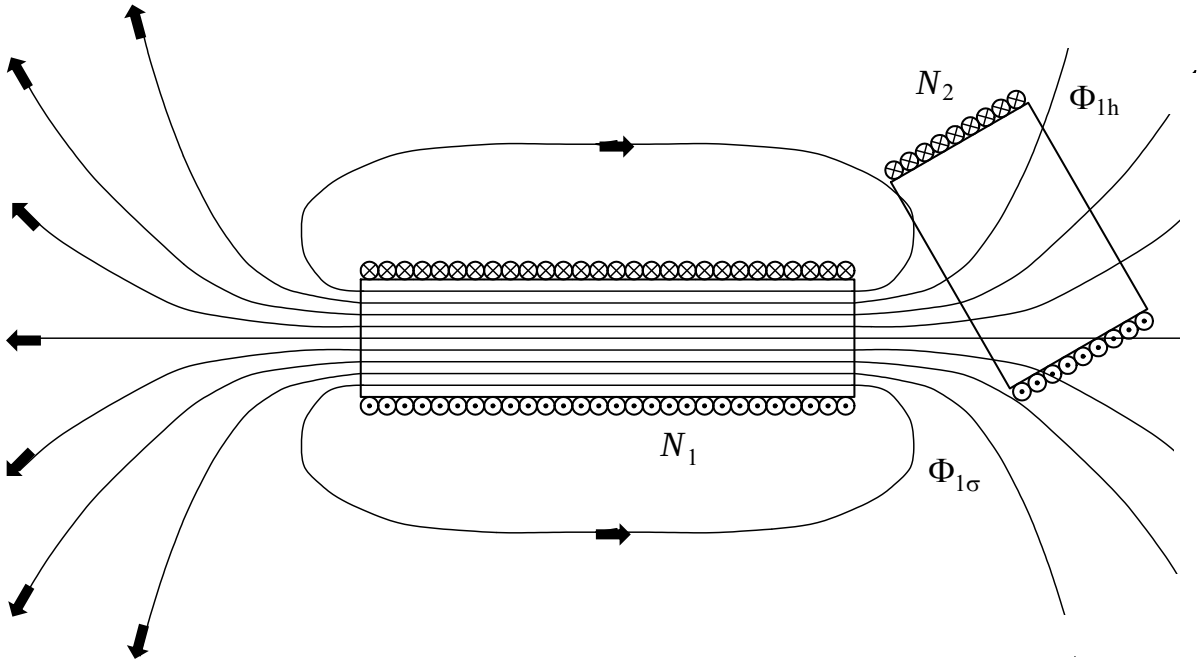
$$L_i = \frac{\mu \cdot l}{4\pi} \quad \text{mit} \quad \mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

(Besonders bedeutsam, wenn der Draht aus ferromagnetischem Material ist.)

$$L = L_a + L_i = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \left[\ln\left(\frac{d - r_0}{r_0} \right) + \frac{\mu_r}{4} \right]$$

10.2.6 Gegeninduktivität

Im Bild sind zwei Stromkreise gezeigt, die ihre gegenseitige Anordnung unverändert beibehalten sollen. Der erste Kreis sei stromdurchflossen, der zweite nicht. Es entsteht ein magnetischer Fluss Φ_1, dessen Größe proportional dem Strom i_1 ist. Ein Teil Φ_{1h} dieses Flusses durchsetzt den zweiten Stromkreis. Dieser Teil des Flusses ist ebenfalls proportional dem Strom i_1. Ein weiterer Teil des Flusses erreicht den zweiten Stromkreis nicht, ist also mit diesem nicht verkettet. Diesen Anteil des vom ersten Stromkreis erzeugten Flusses nennt man Streufluss $\Phi_{1\sigma}$. Abhängig von der Anordnung der beiden Stromkreise und des Mediums, in dem sich das magnetische Feld dieser Stromkreise befindet, wird immer nur ein Teil des Flusses zur Kopplung der beiden Stromkreise beitragen. Diese Kopplung wird nun mit einem weiteren Integralparameter des magnetischen Feldes beschrieben. Wir nennen diesen Parameter Gegeninduktivität *M*. Er gibt an, welche Flussverkettung ein Strom i_1 in der zweiten Spule hervorruft.



Ähnliche Verhältnisse gelten für den Fall, dass die zweite Spule einen Strom führt und die erste Spule nicht. Werden schließlich zwei benachbarte Spulen von Strömen durchflossen und durchsetzen einander (teilweise) mit ihren magnetischen Flüssen kann das Überlagerungsverfahren angewendet werden.

i_2	$=0$ (siehe Bild)		i_1	$=0$	
Φ_1	$=\frac{N_1 \cdot i_1}{R_{m1}}$		Φ_2	$=\frac{N_2 \cdot i_2}{R_{m2}}$	
Φ_{1h}	$=k_1 \cdot \frac{N_1 \cdot i_1}{R_{m1}}$	Hauptfluss	Φ_{2h}	$=k_2 \cdot \frac{N_2 \cdot i_2}{R_{m2}}$	
$\Phi_{1\sigma}$	$=(1-k_1) \cdot \frac{N_1 \cdot i_1}{R_{m1}}$	Streufluss	$\Phi_{2\sigma}$	$=(1-k_2) \cdot \frac{N_2 \cdot i_2}{R_{m2}}$	
u_2'	$=-N_2 \cdot u'_{ind2}$		u_1''	$=-N_1 \cdot u''_{ind1}$	Zuordnung des Spannungszählpfeils zum Flusszählpfeil wie bei der Selbstinduktivität. Daher kommt das Minuszeichen
u_2'	$=N_2 \cdot \frac{d\Phi_{1h}}{dt}$		u_1''	$=N_1 \cdot \frac{d\Phi_{2h}}{dt}$	
u_2'	$=N_2 \cdot k_1 \cdot \frac{N_1}{R_{m1}} \cdot \frac{di_1}{dt}$		u_1''	$=N_1 \cdot k_2 \cdot \frac{N_2}{R_{m2}} \cdot \frac{di_2}{dt}$	
u_2'	$=M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt}$		u_1''	$=M_{21} \cdot \frac{di_2}{dt}$	

$$M = M_{12} = M_{21} = k_1 \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{R_{m1}} = k_2 \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{R_{m2}} \text{ = Gegeninduktivität}$$

$$(\text{ohne Beweis}: \frac{k_1}{R_{m1}} = \frac{k_2}{R_{m2}} \text{ , folgt aus der Energiebilanz})$$

Es lässt sich also zeigen, dass der Wert der Gegeninduktivität *M* nicht davon abhängt, welcher der beiden Stromkreise bestromt wird. Grundvoraussetzung ist nur, dass es sich um ein lineares Medium handelt.

Natürlich haben die beiden Spulen auch ihre Selbstinduktivitäten, so dass für die der eigenen Spule induzierte Spannung nach wie vor gilt:

$$u_1' = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \qquad u_2'' = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Überlagerung:

$$u_1 = u_1' + u_1''$$
$$u_2 = u_2' + u_2''$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \end{aligned}}$$

Kopplungsfaktoren: $k_1 = \frac{\Phi_{1h}}{\Phi_1} \qquad k_2 = \frac{\Phi_{2h}}{\Phi_2}$

(Gesamt-) Kopplungsfaktor $k = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$

Technische Übertrager und Transformatoren sind im Allgemeinen so aufgebaut, dass der Kopplungsfaktor und der magnetische Widerstand für beide Wicklungen gleich sind.

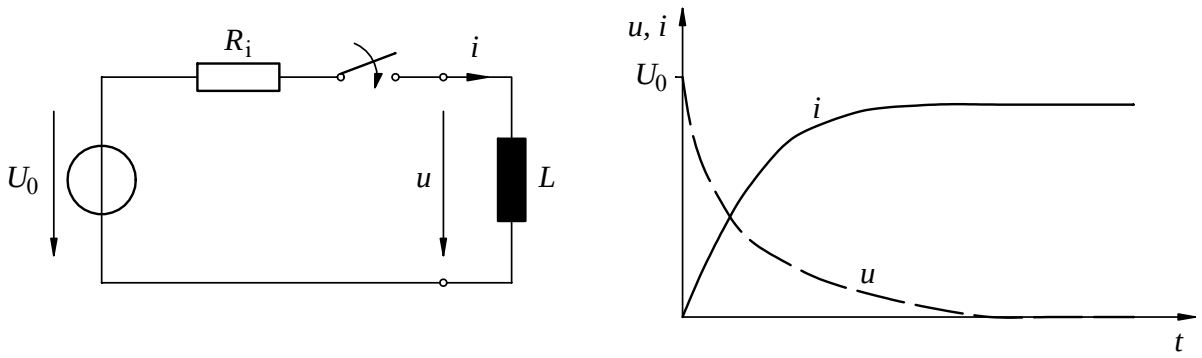
$$k_1 \approx k_2 \approx k \qquad\qquad R_{m1} \approx R_{m2} \approx R_m$$

Zusammenhang zwischen Selbstinduktivitäten und Gegeninduktivität:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1^2}{R_m} \\ L_2 &= \frac{N_2^2}{R_m} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 &= \frac{N_1^2 \cdot N_2^2}{R_m^2} \\ M &= k \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \Rightarrow \\ M^2 &= k^2 \cdot \frac{N_1^2 \cdot N_2^2}{R_m^2} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} M^2 &= k^2 \cdot L_1 \cdot L_2 \\ \boxed{M} &= \boxed{k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}} \end{aligned}$$

10.3 Energie des magnetischen Feldes

10.3.1 Energie der stromdurchflossenen Spule



Die Energie, die in einer Spule gespeichert ist, kann mit Hilfe der Augenblicksleistung berechnet werden. Ab dem Zeitpunkt des Einschaltens wird der Spule Energie zugeführt:

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.
- Zum Zeitpunkt $t = t_1$ ist der stationäre Zustand erreicht.

$0 < t < t_1$ $\qquad\qquad$ $t > t_1$

$i = i(t)$
$u = u(t)$
$\Phi = \Phi(t)$

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$i = I$
$u = 0$
$\Phi = konst$

$$W_m = \int_0^{t_1} i \cdot u \cdot dt$$

L = konst.	$L \neq$ konst.
$W_m = L \cdot \int_0^{t_1} i \cdot \frac{di}{dt} \cdot dt$	$W_m = \int_0^{t_1} i \cdot N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot dt$
$W_m = L \cdot \int_0^{I} i \cdot di$	
$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$	$W_m = \int_0^{\Phi} \Theta \cdot d\Phi$

Betrachten wir zunächst die linke Seite weiter. Die in der Spule gespeicherte Energie hängt somit nicht vom zeitlichen Verlauf des Stromes ab, sondern nur vom Wert der Induktivität und dem Quadrat des aktuell in der Spule fließenden Stromes.

Eine ähnliche Formel kennen wir bereits vom elektrischen Feld:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$$

10.3.2 Energiedichte

Die in einer Spule gespeicherte Energie lässt sich auch mit Hilfe der beiden Feldgrößen *B* und *H* ausdrücken. Hier stößt man dann auf die Größe Energiedichte.

Im homogenen Feld der langen Zylinderspule gilt:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= H \cdot l \\ \Phi &= B \cdot A \end{aligned}\right\} \quad W_m = \int_0^{B \cdot A} H \cdot l \cdot d(B \cdot A) = A \cdot l \cdot \int_0^{B} H \cdot dB$$

$$\frac{W_m}{V} = w_m = \int_0^{B} H \cdot dB$$

Infinitesimal kleine Teilbereiche inhomogener Felder sind quasi–homogen

$$\boxed{\frac{dW_m}{dV} = w_m = \int_0^{B} H \cdot dB}$$

Falls $\mu = \text{konst.}$

gilt $\int_0^B H \cdot dB = \int_0^B \frac{B}{\mu} \cdot dB = \frac{B^2}{2 \cdot \mu}$

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 = \frac{B^2}{2 \cdot \mu}}$$

Auch hier ist eine ähnliche Beziehung bereits vom elektrischen Feld bekannt:

$$\frac{dW_e}{dV} = w_e = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon}$$

Man verwendet häufig die Energiedichte zur Beschreibung der Energie in einem bestimmten Volumenelement des magnetischen Feldes. Im allgemeinen Fall ist der Zusammenhang zwischen den beiden Größen durch ein Volumenintegral gegeben:

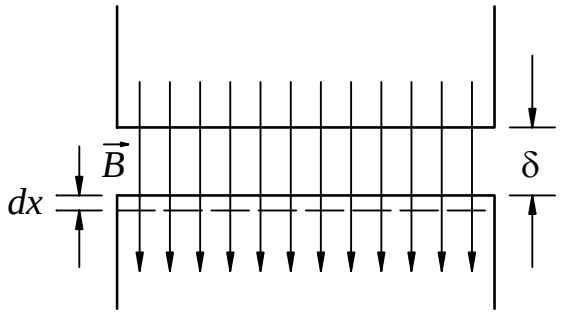
$$W_m = \int_V w_m \cdot dV = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV$$

Für ein System mit zwei Stromkreisen (vgl. Abs. 10.2.6) gilt folgende Formel zur Berechnung der magnetischen Energie:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2$$

10.3.3 Kraft auf Magnetpolflächen

Ebenso wie im elektrischen Feld lassen sich auch im magnetischen Feld Kräfte über eine Energieänderung berechnen. Hier wird virtuell eine Verschiebung eines Teils des Systems vorgenommen und dann die Änderung der Magnetfeldenergie berechnet. Diese Energieänderung ergibt direkt die Kraftwirkung auf den Körper, der virtuell verschoben wurde.



Streuung am Luftspalt vernachlässigt:

$$B = B_E = B_L \quad (\text{homogenes Feld})$$

Die im Luftspalt gespeicherte Energie ist:

$$W_m = \int w_m \cdot dV = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot A \cdot \delta$$

Eine Vergrößerung des Luftspalts auf $\delta + dx$ bewirkt eine Vergrößerung der gespeicherten Energie auf $W_m + dW_m$.

Eine Veränderung der im Eisen gespeicherten Energie findet nicht statt, sofern *B* sich nicht ändert (wegen Erhöhung von R_m)

$$W_m + dW_m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot A \cdot (\delta + dx)$$

Für die mechanisch aufgewandte Arbeit gilt:

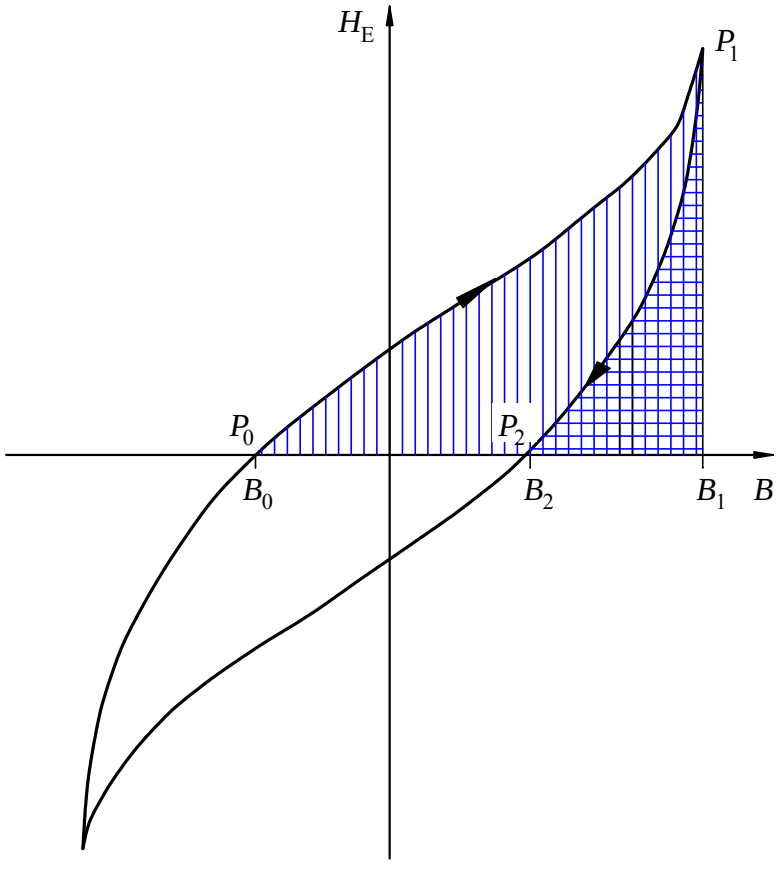
$$dW = F \cdot dx \qquad\qquad dW_m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot A \cdot dx$$

Diese Gleichung lässt sich dann einfach nach der Kraft F auflösen:

$$\boxed{F = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot A} \qquad F \sim B^2$$

Hier ist die Kraft also proportional zu B^2, während die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter proportional zu B ist: $\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$.

10.3.4 Hystereseverluste



Abs. 10.3.2:

$$w_m = \int_0^B H \cdot dB$$

$$w_m\big|_{Eisen} = \int H_E \cdot dB$$

$$w_m\big|_{Luft} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0}$$

$$W_m = \int_V w_m \cdot dV$$

W_{01} ist die Energie, die aufgewendet werden muss, um den Magnetisierungszustand des Eisens vom Punkt P_0 zum Punkt P_1 zu verändern:
Die vertikal - schraffierte Fläche unter der Kurve ist ein Maß für dem Eisen zugeführte Energie.

$$W_{01} = A \cdot l \cdot \int_{B_0}^{B_1} H_E \cdot dB + A \cdot \delta \cdot \frac{B_1^{\,2} - B_0^{\,2}}{2 \cdot \mu_0}$$

Bei der Verlagerung des Arbeitspunktes von P_1 nach P_2 erhält man entsprechend:
Die horizontal – schraffierte Fläche unter der Kurve ist ein Maß für die aus dem Eisen zurückgewonnene Energie.

$$W_{12} = A \cdot l \cdot \int_{B_1}^{B_2} H_E \cdot dB + A \cdot \delta \cdot \frac{B_2^{\,2} - B_1^{\,2}}{2 \cdot \mu_0}$$

Die dem Luftspalt zugeführte Energie wird in voller Höhe wieder zurückgewonnen; denn $B_0^{\,2} = B_2^{\,2}$

Die Energie $W_{01} - W_{12}$ ist verlorengegangen $\rightarrow$ Erwärmung des Eisens

Die Hysterese – Verluste sind also proportional der Fläche der Hystereseschleife und treten bei jedem Zyklus erneut auf; deshalb gilt:

Hysterese – Verlustleistung ist proportional der Frequenz

(Die Wirbelstrom – Verlustleistung dagegen ist ~ f^2, wegen $P = \frac{u^2}{R}$ und $u \sim \frac{d\Phi}{dt} \sim f$)

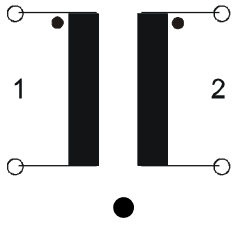
10.4 Transformatoren und Übertrager

Transformator: Energietechnik
Übertrager: Nachrichten- und Informationstechnik

Ziel:

- dient dem Herauf- oder Herunter-Transformieren von Spannungen und Strömen
- galvanische Trennung (Trenntransformator) und Impedanz-Anpassung

Schaltzeichen:



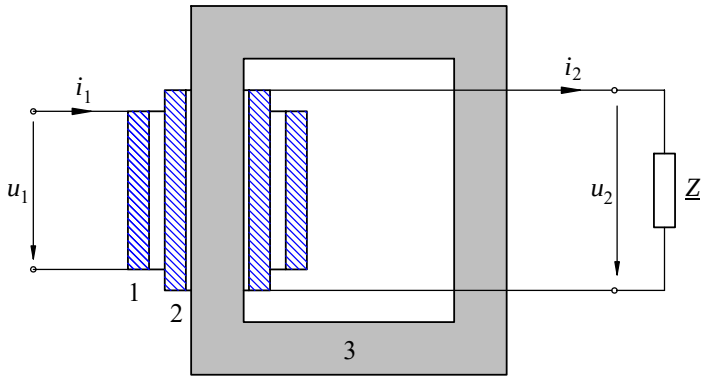
1: Primärwicklung = Eingangsseite, d.h. hier wird die Energie zugeführt, die Spannungsquelle angeschlossen
2: Sekundärwicklung = Ausgangsseite, d.h. hier wird die Energie entnommen

Wicklungssinn (hier gleich)

Es gibt viele Bauformen von Transformatoren, die häufig wesentlich mehr als nur eine sekundäre Wicklung aufweisen, um verschiedene sekundäre Spannungen zu erzeugen. In Dreiphasensystemen werden z.B. Transformatoren mit drei primären und drei

sekundären Wicklungen verwendet. Als Beispiel hier dient ein einfacher Zwei–Wicklungs–Transformator.

10.4.1 Idealer Transformator



1: Primärwicklung mit Windungszahl N_1

2: Sekundärwicklung mit Windungszahl N_2

3: Eisenkern

Voraussetzungen für den idealen Transformator:

- Beide Spulenwicklungen sind gleichsinnig gewickelt und verlustlos: $R_1 = 0$, $R_2 = 0$.

- Der Eisenkern ist „ideal“, d.h. die Permeabilität $\mu_r \to \infty$, und es sollen keine Wirbelstrom- und Ummagnetisierungs-Verluste auftreten. Somit weist er eine unendliche magnetische Leitfähigkeit auf $\Lambda \to \infty$ bzw. $R_m = 0$.

- Beide Wicklungen werden vom gleichen magnetischen Fluss Φ durchsetzt, es gibt also keine Streuung.

Induktionsgesetz:

Da Primär- und Sekundärspule gleichsinnig gewickelt sind und von demselben magnetischen Fluss durchsetzt werden, treten an den Klemmen der beiden Wicklungen nach dem Induktionsgesetz die beiden folgenden Spannungen auf:

$$u_1 = -N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \qquad\qquad u_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Φ bzw. $\frac{d\Phi}{dt}$ sind in beiden Wicklungen gleich

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{u_1}{u_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}} \qquad \ddot{u} = \text{Übersetzungsverhältnis}$$

Das Übersetzungsverhältnis gilt für die Zeitwerte u_1 und u_2 der Spannungen ebenso wie für die Effektivwerte U_1 und U_2.

Durchflutungssatz:

Nachdem der magnetische Widerstand des magnetischen Kreises $R_m = 0$ ist, muss nach dem „Hopkinson'schen Gesetz des Magnetkreises" (Kap. 9.5.5) auch die elektrische Durchflutung gleich Null sein:

$$\Theta = R_m \cdot \Phi = 0$$

Nach dem im Bild verwendeten Zählpfeilsystem fließen die in den gleichsinnig gewickelten Spulen auftretenden Ströme i_1 und i_2 in entgegen gesetzter Richtung. Für die elektrische Durchflutung muss daher auch gelten:

$$\Theta = N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\ddot{u}}}$$

Die Ströme werden also genau im umgekehrten Verhältnis transformiert wie die Spannungen: die Spannung wird zur größeren Windungszahl hinauf, der Strom im gleichen Verhältnis heruntertransformiert.

also: $\boxed{\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}}$

Leistungsbetrachtung:

Nach dem Übersetzungsverhältnis sind sowohl die beiden Spannungen u_1 und u_2 als auch die beiden Ströme i_1 und i_2 jeweils untereinander phasengleich. Primär- und sekundärseitig besteht dann der gleiche Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung, der sekundärseitig z.B. durch die Impedanz $\underline{Z}_a$ bestimmt ist. Für die Scheinleistungen lässt sich zeigen:

$$S_1 = U_1 \cdot I_1 = \frac{N_1}{N_2} \cdot U_2 \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot I_2 = S_2$$

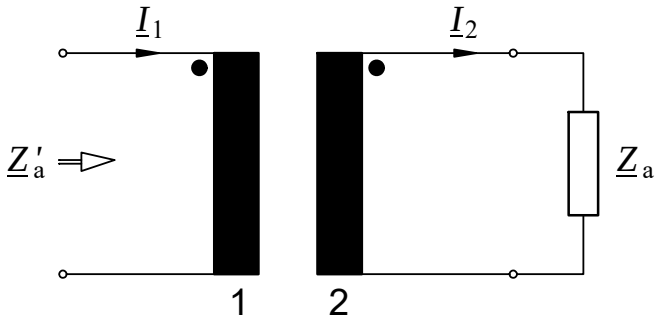
Da im idealen Transformator definitionsgemäß keine Verluste auftreten können, müssen die primärseitig aufgenommene und die sekundärseitig abgegebene Wirkleistung ebenfalls gleich sein: $P_1 = P_2$.

Entsprechendes muss dann letztendlich auch für die Blindleistungen gelten: $Q_1 = Q_2$

Diese Eigenschaften der Leistungsübertragung gelten in erster Näherung auch für technische Transformatoren. So werden z.B. in der Energietechnik für eine Fernübertragung die Spannungen auf hohe Werte transformiert (z.B. 400 kV) , so dass gleichzeitig die Ströme auf kleine Werte transformiert werden, und damit die Stromverluste reduziert werden. Vor dem Verbraucher müssen dann die Spannungen wieder auf die normale Niederspannung der Verbrauchernetze (z.B. 230 V) herunter transformiert werden.

Transformation von Impedanzen:

Idealer Transformator mit Belastung



$$\underline{S}_2 = \underline{Z}_a \cdot I_2^{\,2}$$

Frage: Welche Belastung, welche Impedanz ergibt sich primärseitig?

$$\underline{S}_1 = \underline{Z}_a' \cdot I_1^{\,2}$$

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_2 \;\Rightarrow\; \underline{Z}_a' = \frac{I_2^{\,2}}{I_1^{\,2}} \cdot \underline{Z}_a = \ddot{u}^2 \cdot \underline{Z}_a$$

Impedanzen werden also quadratisch mit dem Übersetzungsverhältnis auf die größere Windungszahl hinauf transformiert. Diese Möglichkeit, z.B. durch einen Empfänger festgelegte Impedanzen in gewünschter Weise (nahezu) verlustfrei in ihrer Größe zu verändern (d.h. ohne Vorwiderstand und Spannungsteiler), wird in der Informationstechnik häufig benutzt (daher der Name Übertrager).

Man kann die Sekundärgrößen an einem Transformator, der in einem Netzwerk eingebaut ist, auf die Primärseite umrechnen (Kennzeichen: ´).

$$\underline{U}_2 \;\Rightarrow\; \underline{U}_2' = \ddot{u} \cdot \underline{U}_2$$
$$\underline{I}_2 \;\Rightarrow\; \underline{I}_2' = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2$$
$$\underline{Z}_a \;\Rightarrow\; \underline{Z}_a' = \ddot{u}^2 \cdot \underline{Z}_a$$

Für den idealen Transformator heißt das:

$$I_1 = I_2'$$
$$U_1 = U_2'$$

Für die Beschreibung des Wechselstromverhaltens kann der ideale Transformator aus der Schaltung “entfernt“ werden. Das Schaltungsverhalten wird, von der Primärseite aus betrachtet, richtig wiedergegeben (Ausnahme: galvanische Trennung!).

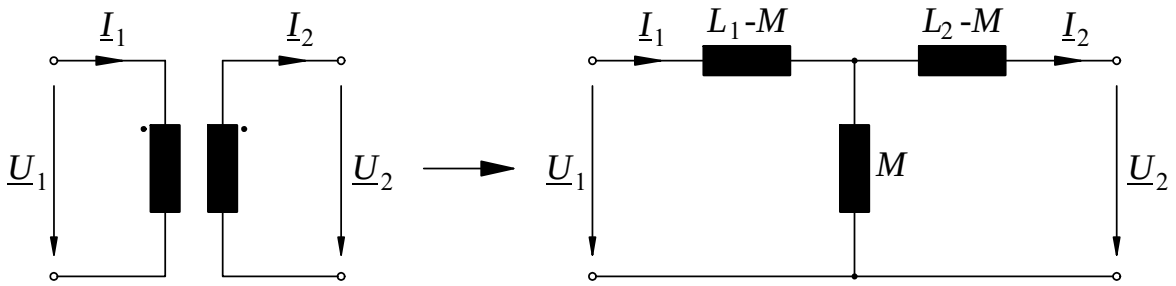
In entsprechender Weise ist auch eine Umrechnung der Primärgrößen $\underline{U}_1, \underline{I}_1, \underline{Z}_1$ auf die Sekundärseite möglich.

10.4.2 Verlustloser Transformator

Transformator jetzt nur noch verlustlos, aber:

- endliche magnetische Leitfähigkeit des Eisenkerns, d.h. $R_m > 0$
- Streuung vorhanden, d.h. $k < 1$

Die gegenseitige Kopplung von Primär- und Sekundärspule wird im ESB durch die Größe Gegeninduktivität *M* beschrieben (vgl. 10.2.6). L_1 und L_2 sind die Selbstinduktivitäten der beiden Spulen.



Gleichungssystem:
(Maschengleichungen)

$$u_1 = (L_1 - M)\cdot\frac{di_1}{dt} + M\cdot\frac{di_1}{dt} - M\cdot\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M\cdot\frac{di_1}{dt} - M\cdot\frac{di_2}{dt} - (L_2 - M)\cdot\frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= L_1\cdot\frac{di_1}{dt} - M\cdot\frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M\cdot\frac{di_1}{dt} - L_2\cdot\frac{di_2}{dt} \end{aligned}}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den Spannungsgleichungen aus Kap. 10.2.6 überein, wenn man die unterschiedliche Richtung des Stromes i_2 berücksichtigt. Für sinusförmige Größen und nach Übergang auf komplexe Darstellung lässt sich dann schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1\cdot\underline{I}_1 - j\omega M\cdot\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M\cdot\underline{I}_1 - j\omega L_2\cdot\underline{I}_2 \end{aligned}}$$

Auch hier gilt: Das ESB gibt das Verhalten des verlustlosen Transformators richtig wieder (Ausnahme: galvanische Trennung)

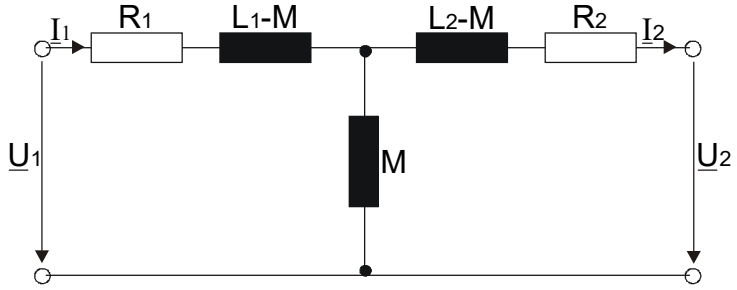
Achtung: bei $N_1 \neq N_2$ kann es passieren, dass entweder $(L_1 - M) < 0$ oder $(L_2 - M) < 0$! Dies ist zwar physikalisch nicht unmittelbar interpretierbar, damit kann auch das ESB nicht tatsächlich aufgebaut werden, es ist aber für die Rechnung korrekt.

10.4.3 Transformator mit Kupferverlusten

Grundsätzlich kann man die bei technischen Transformatoren auftretenden Verlustleistungen in zwei Kategorien unterteilen:

- Kupferverluste durch Wirkwiderstände der (Kupfer-) Wicklungen
- Eisenverluste beim Ummagnetisieren und durch Wirbelströme im (Eisen-) Kern

Hier werden zunächst nur die Kupferverluste berücksichtigt, im ESB einfach durch Vorschalten der Ohm'schen Widerstände R_1 und R_2 vor den Primär- und Sekundärwicklungen.



Das Aufstellen der Maschengleichungen (analog zu 10.4.2) führt dann zu:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\cdot \underline{I}_1 + j\omega M(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\\ \underline{U}_2 &= -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega(L_2 - M)\cdot \underline{I}_2 + j\omega M(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\cdot \underline{I}_1 - j\omega M\cdot \underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= j\omega M \cdot \underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2)\cdot \underline{I}_2\end{aligned}}$$

Kennt man die Kenngrößen des Transformators, enthält das Gleichungssystem noch die vier Unbekannten $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{I}_1, \underline{I}_2$. Kann die sekundärseitige Belastung des Transformators beschrieben werden durch:

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2$$

und ist schließlich die primärseitige Eingangsspannung $\underline{U}_1$ bekannt, lässt sich das Gleichungssystem vollständig lösen.

Es lassen sich nun wieder die Sekundärgrößen auf die Primärseite umrechnen (vgl. 10.4.1). Dann kann das ESB besser interpretiert werden. Dafür werden die Beziehungen $\underline{U}'_2 = \ddot{u}\cdot\underline{U}_2$ und $\underline{I}'_2 = \underline{I}_2/\ddot{u}$ verwendet. Man formt dann zunächst die beiden o.g. Maschengleichungen um:

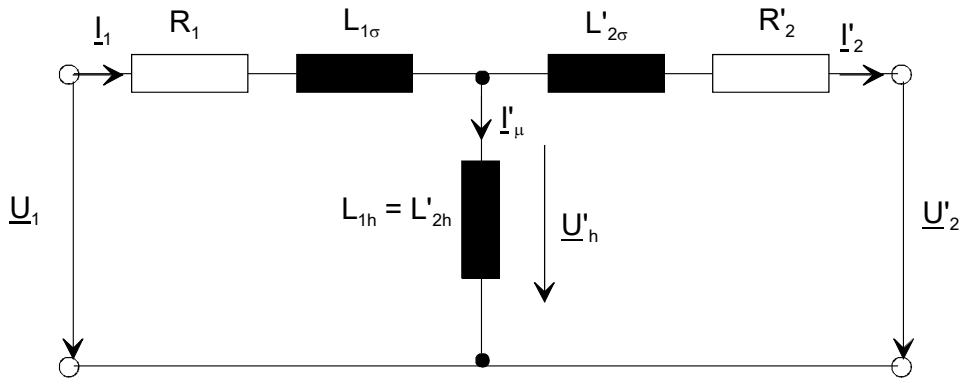
$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - \ddot{u}\cdot M)\cdot \underline{I}_1 + j\omega\cdot\ddot{u}\cdot M\left(\underline{I}_1 - \frac{1}{\ddot{u}}\cdot\underline{I}_2\right)$$

$$\ddot{u}\cdot\underline{U}_2 = -\ddot{u}^2\cdot R_2\cdot\frac{1}{\ddot{u}}\cdot\underline{I}_2 - j\omega\left(\ddot{u}^2\cdot L_2 - \ddot{u}\cdot M\right)\cdot\frac{1}{\ddot{u}}\cdot\underline{I}_2 + j\omega\cdot\ddot{u}\cdot M\left(\underline{I}_1 - \frac{1}{\ddot{u}}\cdot\underline{I}_2\right)$$

Dann erhält man das Gleichungssystem für das nachstehende ESB:

$$\underline{U}_1 = R_1\cdot\underline{I}_1 + j\omega L_{1\sigma}\cdot\underline{I}_1 + j\omega L_{1h}\cdot(\underline{I}_1 - \underline{I}'_2)$$

$$\underline{U}'_2 = -R'_2\cdot\underline{I}'_2 - j\omega L'_{2\sigma}\cdot\underline{I}'_2 + j\omega L'_{2h}\cdot(\underline{I}_1 - \underline{I}'_2)$$



Im ESB sind dabei:

- $L_{1\sigma} = L_1 - \ddot{u} \cdot M$ die primäre Streuinduktivität;
- $L_{2\sigma} = L_2 - \frac{1}{\ddot{u}} \cdot M$ die sekundäre Streuinduktivität, die natürlich auf die Primärseite umgerechnet wird: $L'_{2\sigma} = \ddot{u}^2 \cdot L_{2\sigma} = \ddot{u}^2 \cdot L_2 - \ddot{u} \cdot M$;
- $L_{1h} = \ddot{u} \cdot M$ die primäre Hauptinduktivität;
- $L_{2h} = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot M$ die sekundäre Hauptinduktivität, die wieder auf die Primärseite umgerechnet wird: $L'_{2h} = \ddot{u}^2 \cdot L_{2h} = \ddot{u} \cdot M$, und es gilt natürlich: $L_{1h} = L'_{2h}$.

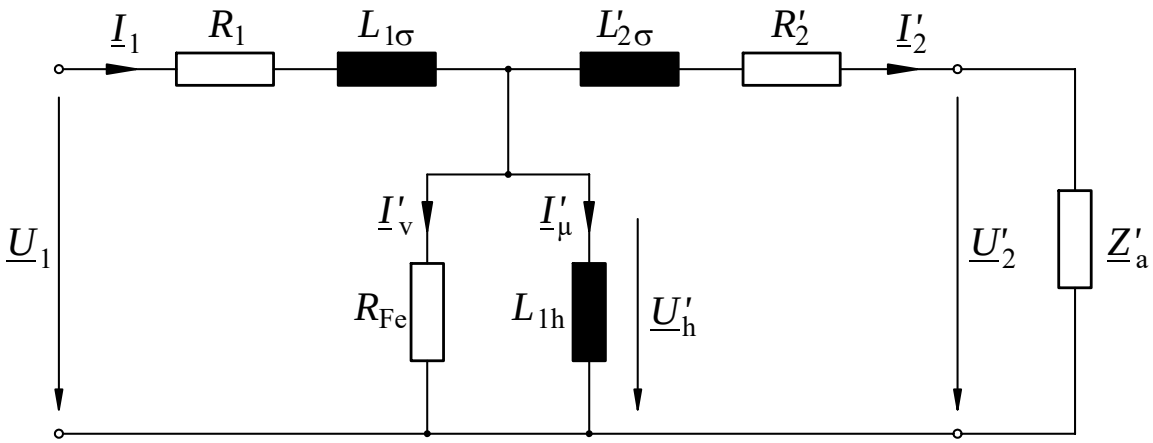
Der auf die Primärseite bezogene Magnetisierungsstrom $\underline{I}'_{\mu} = \underline{I}_1 - \underline{I}'_2$ ist der Strom, der zur Erzeugung des Hauptflusses (oder auch Nutzflusses) Φ_{1h} erforderlich ist. Die Spannung $\underline{U}'_h$ wird Hauptfeldspannung genannt.

10.4.4 Transformator mit Kupfer- und Eisenverlusten

Bei technisch realisierten Transformatoren treten neben den Kupferverlusten auch Ummagnetisierungs- und Wirbelstromverluste im (Eisen-)Kern statt. Diese deshalb so genannten Eisenverluste sind angenähert proportional dem Quadrat der Spannung und werden im ESB durch einen zur Hauptinduktivität parallel liegenden Wirkwiderstand R_{Fe} berücksichtigt.

Neben dem Magnetisierungsstrom $\underline{I}'_{\mu}$ erhält man nun auch einen Wirkanteil $\underline{I}'_{v}$, so dass die Eisenverluste beschrieben werden können durch das Produkt $U'_h I'_v$.

Mit Hilfe des hier dargestellten ESB ist es nun möglich, das Verhalten eines Transformators unter Last zu beschreiben.


$\underline{I}_1$
R_1
$L_{1\sigma}$
$L'_{2\sigma}$
R'_2
$\underline{I}'_2$
$\underline{U}_1$
$\underline{I}'_\mathrm{v}$
$\underline{I}'_\mu$
R_Fe
L_1h
$\underline{U}'_\mathrm{h}$
$\underline{U}'_2$
$\underline{Z}'_\mathrm{a}$

11. Maxwell‘sche Gleichungen

Dieser Abschnitt dient der Zusammenfassung der wesentlichen, bisher hergeleiteten Gesetze des elektrischen und des magnetischen Feldes. Diese Zusammenhänge werden als Maxwell‘sche Gleichungen bezeichnet.

11.1 Durchflutungssatz

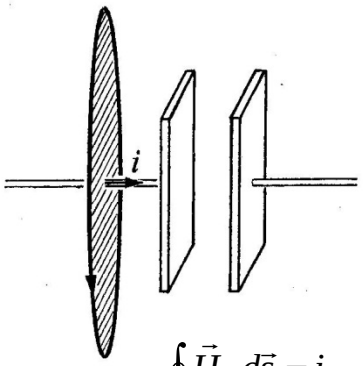
Der Durchflutungssatz beschreibt den Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke und dem Strom als Ursache dieses magnetischen Feldes. Die Anwendung dieser Gleichung erfordert die Integration über eine geschlossene Schleife. Der dabei umfasste Strom wird auch als Durchflutung bezeichnet. Dieser Satz kann auch bei einer Magnetfeldberechnung innerhalb von Leitern angewendet werden. Damit ergibt sich für stationäre Zustände:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Bei Wechselfeldern, insbesondere bei höheren Frequenzen, muss der elektrische Verschiebungsstrom mit berücksichtigt werden. Dies zeigt das folgende Beispiel.

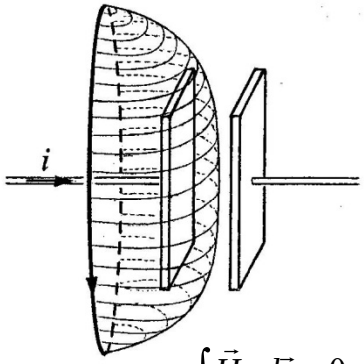
Wendet man die o.g. Gleichung an auf den instationären Fall eines Kondensators, der geladen wird, so ergeben sich zwei mögliche Fälle:

Fläche straff gespannt



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i$$

gekrümmte Fläche zwischen den Kondensatorplatten hindurch geführt



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

Der Integrationsweg $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$ ist für beide Fälle identisch, die Fläche wird allerdings im linken Fall vom Strom *i* durchflossen, während rechts kein Stromfluss durch die Fläche auftritt.

Dieses zweite Ergebnis ist offensichtlich falsch. Deshalb muss für den Raum zwischen den beiden Kondensatorplatten der „Verschiebungsstrom“ eingeführt werden, der sich aus dem elektrischen Feld ergibt:

$$i = \frac{dQ}{dt} \qquad Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{A}$$ Verschiebungsstrom

mit $\frac{d\vec{D}}{dt}$ = Verschiebungsstromdichte

Die allgemeine Gleichung für den Durchflutungssatz (gültig auch für instationäre Felder) lautet damit wie folgt:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$$

11.2 Induktionsgesetz

Aus der Netzwerkanalyse ist bekannt, dass bei einem einfachen Umlauf in einer geschlossenen Masche die Summe aller Spannungen sich zu Null ergibt (Kirchhoff'sche Maschengleichung). Formuliert über die elektrische Feldstärke heißt dies:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Dies gilt allerdings nur, wenn keine zeitlich veränderlichen magnetischen Felder auftreten. Die in einer Schleife (= Masche) induzierte Spannung ergibt sich ja bekanntlich aus der Änderung des die Schleife durchdringenden magnetischen Flusses:

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Damit lautet die allgemeine Gleichung für das Induktionsgesetz (gültig auch für instationäre Felder) wie folgt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

11.3 Gauß'scher Satz

Die Integration der elektrischen Flussdichte über eine geschlossene Hüllfläche ergibt die Ladung, die sich innerhalb dieser Hüllfläche befindet:

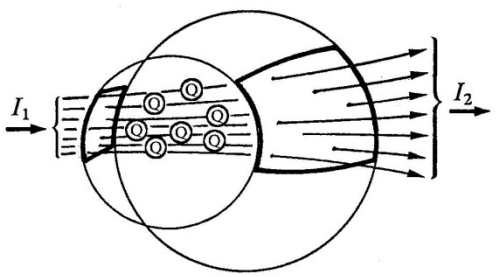
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Diese Beziehung dient auch als Grundlage zur Berechnung elektrischer Felder von unterschiedlichen Anordnungen. Ersetzt man die Ladung *Q* durch das Volumenintegral über die Raumladungsdichte ρ, so folgt die allgemeine Darstellung:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \rho \cdot dV$$

11.4 Kontinuitätsgleichung

Die Kirchhoff'sche Knotenpunktsgleichung besagt, dass die Summe aller Ströme an einem Knoten Null ergibt. Etwas anders formuliert folgt daraus, dass das stationäre Strömungsfeld quellenfrei ist:



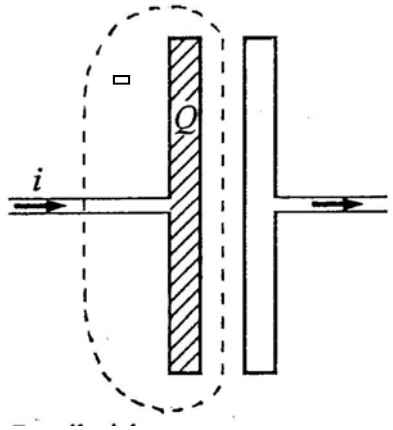
$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

hier also: $I_2 - I_1 = 0$

$$I_2 = I_1$$

Im instationären Strömungsfeld ist es dagegen möglich, dass zeitweilig mehr (oder weniger) Ladungen in das Volumen einströmen als ausströmen.

Beispiel: Aufladung eines Kondensators



Da keine Ladung verloren gehen kann, führt dies zu einer Ladungszunahme (bzw. –abnahme) in dem betreffenden Volumen:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

oder allgemeiner:

$$i_1 - i_2 = \frac{dQ}{dt} \text{ und } i_2 - i_1 = -\frac{dQ}{dt}$$

Ersetzt man schließlich noch die Stromdifferenz durch das Integral der Stromdichte über eine geschlossene Hüllfläche und die Ladung durch das Volumenintegral über die durch die Hüllfläche eingeschlossene Raumladungsdichte, so folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \rho \cdot dV$$

11.5 Magnetischer Fluss

Diese Beziehung drückt aus, dass das Feld der magnetischen Flussdichte *B* keine Quellen hat. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Feldlinien grundsätzlich immer in sich geschlossen sind.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

11.6 Materialgleichungen

Elektrostatisches Feld: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$

Elektrisches Strömungsfeld: $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$

Magnetisches Feld: $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

11.7 Zusammenfassung

Maxwell'sche Gleichungen in Integralform

Elektrostatisches Feld	Elektrisches Strömungsfeld	Magnetisches Feld
$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \rho \cdot dV$ Gauß'scher Satz	$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \rho \cdot dV$ Kontinuitätsgleichung	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ Magnetischer Fluss
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ Induktionsgesetz		$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$ Durchflutungssatz
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$
Das elektrostatische Feld ist ein Quellenfeld	Das elektrische Strömungsfeld hat dann Quellen, wenn es instationär ist	Das magnetische Feld íst quellenfrei
Das elektrische Feld hat dann Wirbel, wenn ein instationäres magnetisches Feld vorhanden ist		Das magnetische Feld ist ein Wirbelfeld

Ein Spezialfall bei den Feldern ist durch folgende Randbedingungen definiert (diese Bedingungen bestehen im Vakuum und weitestgehend auch in Luft):

Raumladungsdichte	$\rho = 0$
Leitfähigkeit	$\kappa = 0$
Stromdichte	$J = 0$

Damit reduzieren sich die Gleichungen zu:

$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	quellenfrei
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$	wirbelbehaftet
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\mu_0 \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{H} \cdot d\vec{A}$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	

Die letzten zwei Gleichungen beschreiben zwei zeitabhängige quellenfreie Wirbelfelder, welche sich gegenseitig erzeugen. Diese beiden Felder charakterisieren eine so genannte **elektromagnetische Welle**, welche sich im Vakuum sowie näherungs-weise auch in Luft mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

12. Stromverdrängung, Skin-Effekt

12.1 Grundlagen

Für einen Gleichstrom *I* gilt, dass er sich gleichmäßig über den Leiterquerschnitt *A* verteilt. Die Stromdichte ist bei geraden Leitern mit ortsunabhängigem Querschnitt überall gleich. Jeder Strompfad ist weiterhin von einem Magnetfeld *H* umgeben, das sich gemäß dem Durchflutungsgesetz beschreiben lässt:

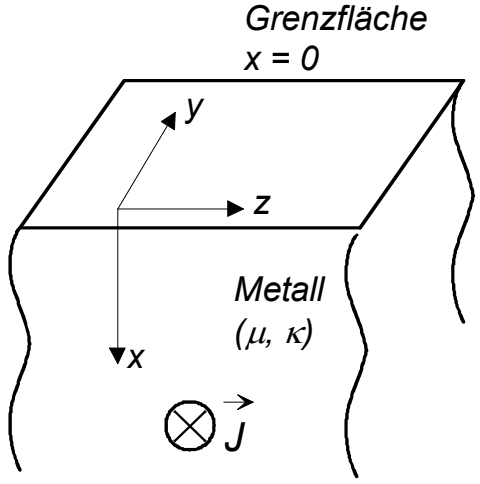
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Ändert sich der Strom zeitlich, ändert sich auch das Magnetfeld. Es werden dann gemäß dem Induktionsgesetz zusätzliche elektrische Feldstärken hervorgerufen, die sich den bestehenden Feldern überlagern.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Bei Wechselströmen ist wegen dieser Induktion zusätzlicher elektrischer Felder eine Schwächung der Stromdichte im Inneren der Leiter zu beobachten; der Strom konzentriert sich in der Nähe der Oberfläche (Skineffekt, Hauteffekt).

Die Berechnung dieses Verhaltens bei runden Leitern ist rel. aufwändig. Einfacher ist es, die Feldverteilung in der Nähe einer ebenen Oberfläche zu ermitteln.

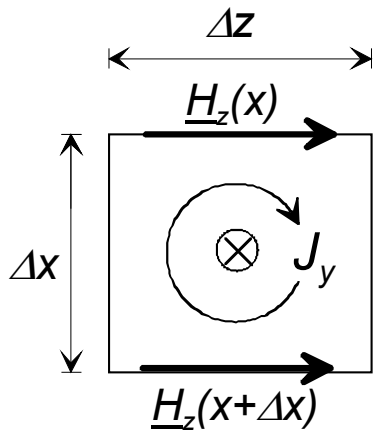


Wir betrachten einen Ausschnitt aus einem Metallblock, dessen Oberfläche bei $x = 0$ liegt. Der Strom fließt in *y*-Richtung. Die Stromdichte J_y soll unabhängig von *y* und *z* sein. Bei zeitlicher Änderung wird J_y bei $x = 0$ am stärksten sein und mit zunehmender Tiefe *x* kleiner werden.

Alle zu betrachtenden Feldgrößen *J*, *E* und *H* sollen als sinusförmige Zeitfunktionen angenommen werden, so dass komplexe Ansätze gemacht werden können:

$$\underline{J}_y(x,t) = \underline{J}_y(x) \cdot e^{j\omega t}$$
$$\underline{E}_y(x,t) = \underline{E}_y(x) \cdot e^{j\omega t}$$
$$\underline{H}_z(x,t) = \underline{H}_z(x) \cdot e^{j\omega t}$$

Wir wollen nun die Tiefenabhängigkeit der drei Feldgrößen bestimmen. Dazu betrachten wir uns zunächst noch einmal das Durchflutungsgesetz.



In jeder Tiefe x muss für ein Flächenelement gelten: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$

$$\underline{H}_z(x) \cdot \Delta z - \underline{H}_z(x+\Delta x) \cdot \Delta z \approx \underline{J}_y\left(x + \Delta x/2\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

Daraus ergibt sich:

$$\underline{J}_y\left(x + \Delta x/2\right) \approx -\frac{\underline{H}_z(x+\Delta x) - \underline{H}_z(x)}{\Delta x}$$

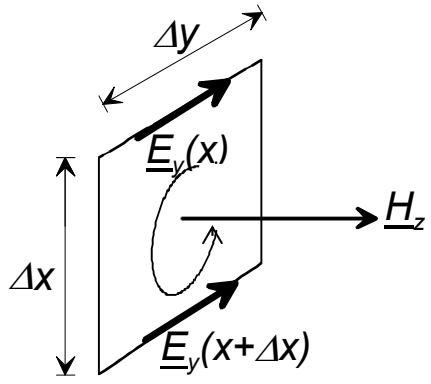
und für beliebig kleine Abmessungen Δx folgt:

$$\underline{J}_y(x) = -\frac{d\underline{H}_z(x)}{dx}$$

Setzt man noch die Materialgleichung $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ ein, so erhält man schließlich:

$$\frac{d\underline{H}_z(x)}{dx} = -\kappa \cdot \underline{E}_y(x)$$

Weiterhin ist natürlich auch das Induktionsgesetz gültig.



Für beliebige Orte x muss gelten: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

$$\underline{E}_y(x+\Delta x) \cdot \Delta y - \underline{E}_y(x) \cdot \Delta y \approx -j\omega \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \underline{H}_z\left(x + \Delta x/2\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\underline{E}_y(x+\Delta x) - \underline{E}_Y(x)}{\Delta x} \approx -j\omega \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \underline{H}_z\left(x + \Delta x/2\right)$$

und für beliebig kleine Abmessungen Δx folgt:

$$\frac{d\underline{E}_y(x)}{dx} = -j\omega \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \underline{H}_z(x)$$

Es ergeben sich zwei gekoppelte DGL 1. Ordnung. Will man die Feldgrößen $\underline{H_z}$ oder $\underline{E_y}$ in Abhängigkeit von der Tiefe *x* beschreiben, so kann dies wie folgt geschehen.

Aus der mit Hilfe des Induktionsgesetzes gewonnen Gleichung wird durch Differenzieren nach *x*:

$$\frac{d^2\underline{E}_y(x)}{dx^2} = -j\omega \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \frac{d\underline{H}_z(x)}{dx}$$

Setzt man nun auf der rechten Seite die aus dem Durchflutungssatz erhaltene Beziehung ein, erhält man: $$\frac{d^2\underline{E}_y(x)}{dx^2} = j\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa\cdot\underline{E}_y(x)$$

Auf analoge Weise erhält man: $$\frac{d^2\underline{H}_z(x)}{dx^2} = j\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa\cdot\underline{H}_z(x)$$

Weil beide Gleichungen sich entsprechen, ist es zunächst ausreichend, nur eine der beiden DGL 2. Ordnung weiter zu betrachten. Wir tun dies für $\underline{E}_y(x)$.

Der Lösungsansatz lautet: $$\underline{E}_y(x) = \underline{E}_1\cdot e^{-\underline{\gamma}\cdot x} + \underline{E}_2\cdot e^{+\underline{\gamma}\cdot x}$$

Durch zweimaliges Differenzieren erhält man:

$$\frac{d\underline{E}_y(x)}{dx} = -\underline{\gamma}\cdot\underline{E}_1\cdot e^{-\underline{\gamma}\cdot x} + \underline{\gamma}\cdot\underline{E}_2\cdot e^{+\underline{\gamma}\cdot x} \qquad \frac{d^2\underline{E}_y(x)}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\cdot\underline{E}_1\cdot e^{-\underline{\gamma}\cdot x} + \underline{\gamma}^2\cdot\underline{E}_2\cdot e^{+\underline{\gamma}\cdot x} = \underline{\gamma}^2\cdot\underline{E}_y(x)$$

Durch Vergleich mit der DGL für $\underline{E}_y(x)$ folgt: $$\underline{\gamma}^2 = j\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa$$

bzw. $$\underline{\gamma} = \sqrt{\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa}\cdot e^{j\pi/4} = \sqrt{\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa}\cdot\frac{(1+j)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa}{2}}\cdot(1+j)$$

Für zunehmende Tiefe *x* im Leiter kann die elektrische Feldstärke $\underline{E}_y(x)$ keineswegs zunehmen, sie muss sogar abnehmen. Diese Bedingung erfüllt nur der Term mit $\underline{E}_1$, so dass $\underline{E}_2 = 0$ sein muss. Dann ist $\underline{E}_1$ nichts anderes als die elektrische Feldstärke an der Oberfläche des Leiters bei $x = 0$.

Für die elektrische Feldstärke ergibt sich also: $$\underline{E}_y(x) = \underline{E}_y(0)\cdot e^{-\underline{\gamma}\cdot x}$$

Analog gilt für die magnetische Feldstärke: $$\underline{H}_z(x) = \underline{H}_z(0)\cdot e^{-\underline{\gamma}\cdot x}$$

$\underline{E}_y(0)$ und $\underline{H}_z(0)$ haben nicht die gleiche Phasenlage. $\underline{E}_y(t)$ und $\underline{H}_z(t)$ haben wohl an einem Ort *x* jeweils sinusförmige Zeitabhängigkeit, sind aber gegeneinander phasenverschoben.

12.2 Örtliche und zeitliche Abhängigkeit von elektrischer Feldstärke

Betrachten wir nun weiter zunächst die elektrische Feldstärke und ihre Abhängigkeit nicht nur von der Tiefe *x* sondern auch von der Zeit *t*, also $\underline{E}_y(x, t)$. Es tritt jeweils der Realteil der komplexen Größe $\underline{E}_y(x, t)$ auf, es gilt also:

$$E_y(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{E}_y(0)\cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa}{2}}\cdot x}\cdot e^{-j\sqrt{\frac{\omega\cdot\mu_0\mu_r\cdot\kappa}{2}}\cdot x}\cdot e^{j\omega t}\right\}$$

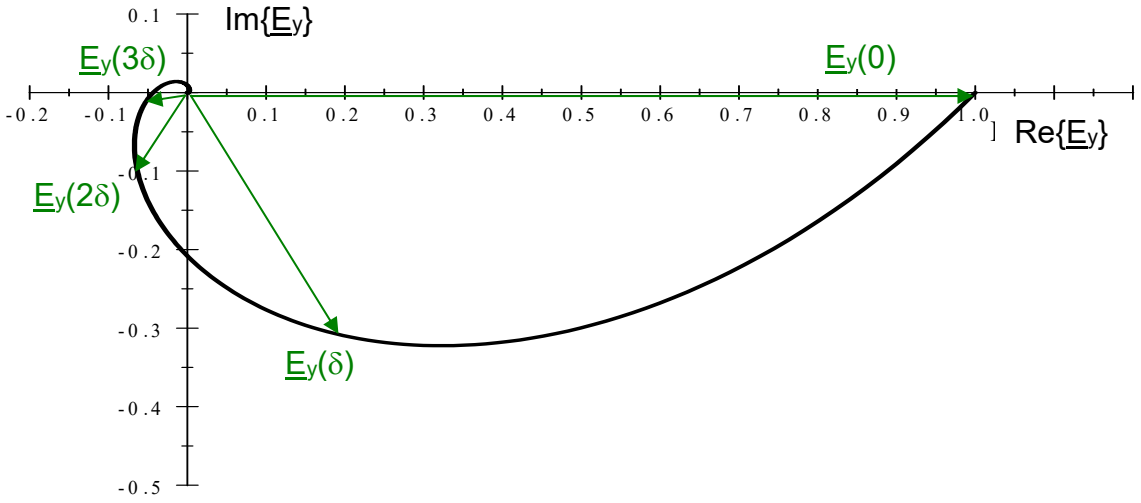
Der Faktor $\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \kappa}{2}}$ beschreibt die Amplitudenabnahme von *E* ebenso wie eine Phasendrehung. Definiert man $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \kappa}}$, so lässt sich die obige Gleichung einfacher formulieren:

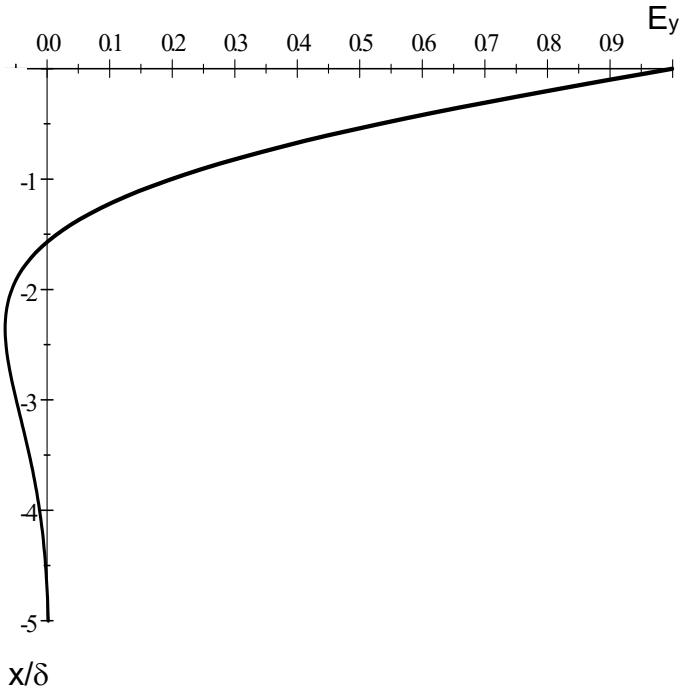
$$E_y(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{E}_y(0) \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{x}{\delta}} \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

Die Größe δ wird als Eindringmaß bzw. Eindringtiefe oder auch Leitschichtdicke bezeichnet. Bei Erreichen der Tiefe $x = \delta$ ist der Betrag der elektrischen Feldstärke auf den Wert 1/e abgesunken.

Legt man nun die Zeitabhängigkeit so, dass $\underline{E}_y(0)$ rein reell und positiv ist, also bei $t = 0$ die elektrische Feldstärke an der Oberfläche ihren Maximalwert hat, dann kann die *x*-Abhängigkeit durch eine Ortskurve beschrieben werden, aus der für jede Tiefe *x* die Amplitude und die Phasenlage in Bezug auf den Wert an der Oberfläche abgelesen werden kann:

$$\underline{E}_y(x, t=0) = E_y(0) \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{x}{\delta}}$$





Die reellen Feldstärken sind nebenstehend für $t = 0$ dargestellt. Man erhält sie wiederum als Realteile aus der obigen Ortskurve.

Man erkennt, dass zur Zeit $t = 0$ die elektrische Feldstärke und damit nach $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ auch die Stromdichte nicht nur mit wachsender Tiefe x exponentiell abnimmt, sondern in bestimmten Tiefenbereichen sogar Gegenströme und Gegenfeldstärken in Bezug auf die Oberflächengrößen auftreten.

Abschließend werden hier alle drei Feldgrößen in Abhängigkeit von Ort und Zeit beschrieben. Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\underline{E}_y(x,t) = \underline{E}_y(0) \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{-jx/\delta} \cdot e^{j\omega t}$$
$$\underline{J}_y(x,t) = \underline{J}_y(0) \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{-jx/\delta} \cdot e^{j\omega t}$$
$$\underline{H}_z(x,t) = \underline{H}_z(0) \cdot e^{-x/\delta} \cdot e^{-jx/\delta} \cdot e^{j\omega t}$$

12.3 Praktische Bedeutung, Beispiele

12.3.1 Impedanz eines Leitungsstücks

Der Wirkwiderstand eines Leitungsstücks berechnet sich aus der Länge l, der Breite b, der Dicke d und der Leitfähigkeit κ bei ortsunabhängiger Stromdichte J (Gleichstrom) zu:

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot b \cdot d} = \frac{U}{I} = \frac{E \cdot l}{J \cdot b \cdot d}$$

Für die Impedanz bei Wechselstrom gilt entsprechend: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$

Bei einem Leiterstück wird die Spannung in der Regel an der Oberfläche gemessen:

$$\underline{U} = \underline{E}(x=0) \cdot l = \underline{E}_y(0) \cdot l$$

Der Wechselstrom $\underline{I}$ dagegen ergibt sich durch Integration der tiefenabhängigen Stromdichte $\underline{J}(x)$ über den gesamten Querschnitt:

$$\underline{I} = b \cdot \int_{x=0}^{\infty} \underline{J}(x) dx$$

Mit $\underline{J}_y(x) = \kappa \cdot \underline{E}_y(x) = \kappa \cdot \underline{E}_y(0) \cdot e^{-(1+j)x/\delta}$ erhält man:

$$\underline{I} = b \cdot \kappa \cdot \underline{E}_y(0) \int_{x=0}^{\infty} e^{-(1+j)x/\delta} dx = \frac{b \cdot \kappa \cdot \underline{E}_y(0) \cdot \delta}{1+j} = \frac{b \cdot \kappa \cdot \underline{E}_y(0) \cdot \delta}{2} \cdot (1-j)$$

Für die Impedanz ergibt sich damit:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{E}_y(0) \cdot l}{b \cdot \kappa \cdot \underline{E}_y(0) \cdot \delta}(1+j) = \frac{l}{b \cdot \kappa \cdot \delta}(1+j) = R + jX_i \quad \text{und} \quad R = \frac{l}{b \cdot \kappa \cdot \delta}$$

Der Wirkwiderstand *R* eines Leitungsstücks mit unendlicher Dicke (bzw. bei sehr ausgeprägtem Skin-Effekt) ist also ebenso groß wie der Widerstand eines leitenden Bereichs der Dicke δ, bei dem die Stromdichte überall gleichmäßig verteilt ist. Diese „äquivalente Leitschichtdicke“ δ ist material- und frequenzabhängig.

Weiterhin ist bei ausgeprägtem Skin-Effekt der Imaginärteil der Impedanz genauso groß wie der Wirkwiderstand. Dieser Imaginärteil X_i repräsentiert die sogenannte innere Induktivität.

12.3.2 Verluste bei ausgeprägtem Skin-Effekt

Mit dem in 12.3.1 berechneten Wirkwiderstand (Realteil der Impedanz) und dem Strom *I* kann für ein Leitungsstück die Verlustleistung berechnet werden. Dies gelingt hier mit zwei Ansätzen.

Die 1. Lösung gelingt über die Integration in einem Leitungsstück bei ausgeprägtem Skineffekt. Es gilt:

$$\overline{P} = \frac{l \cdot b}{2} \cdot \int_{x=0}^{\infty} \underline{E}_y(x) \cdot \underline{J}_y^*(x) \cdot dx$$

Hinweis: Zum Ansatz von $\underline{J}_y^*(x)$ siehe komplexe Leistungsberechnung

$$\overline{P} = \frac{l \cdot b}{2 \cdot \kappa} \cdot \int_{x=0}^{\infty} J_y^2(x=0) \cdot e^{-\frac{2x}{\delta}} \cdot dx = \frac{l \cdot b \cdot J_y^2(x=0)}{2 \cdot \kappa} \left(-\frac{\delta}{2}\right) \left[e^{-\frac{2x}{\delta}} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{l \cdot b \cdot \delta \cdot J_y^2(x=0)}{4 \cdot \kappa}$$

Zur Probe wird überprüft, ob das Ergebnis auch mit dem Ansatz $\overline{P} = 1/2 \cdot \hat{I}^2 \cdot R$ zu bekommen ist (2. Lösung). Aus 12.3.1 folgte:

$$\hat{I} = \frac{b \cdot \kappa \cdot \underline{E}_y(0) \cdot \delta}{\sqrt{2}} = \frac{b \cdot \underline{J}_y(0) \cdot \delta}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad R = \frac{l}{b \cdot \kappa \cdot \delta}.$$

Daraus erhält man: $\overline{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 \cdot \delta^2 \cdot J_y^2(x=0) \cdot l}{2 \cdot b \cdot \kappa \cdot \delta} = \frac{l \cdot b \cdot \delta \cdot J_y^2(x=0)}{4 \cdot \kappa}$

12.3.3 Eindringtiefe

Bei ausgeprägtem Skin-Effekt kann man annehmen, dass der Strom nur in einer dünnen Oberflächenschicht mit der Dicke δ fließt.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \kappa}}$$

Für drei ausgewählte Materialien ergeben sich damit die folgenden Eindringtiefen:

Frequenz	Kupfer	Aluminium	Stahl
	$\mu_R = 1$	$\mu_r = 1$	$\mu_r = 200$
	$\kappa = 57{,}14$ Sm/mm^2	$\kappa = 34{,}8$ Sm/mm^2	$\kappa = 7{,}69$ Sm/mm^2
	δ in mm	δ in mm	δ in mm
1 Hz	66,6	85,3	12,8
10 Hz	21,1	27	4,06
50 Hz	9,42	12,1	1,81
100 Kz	6,66	8,53	1,28
1 kHz	2,11	2,7	0,406
10 kHz	0,666	0,853	0,128
100 kHz	0,211	0,27	0,0406
1 MHz	0,0666	0,0853	0,0128
10 MHz	0,0211	0,027	0,00406
100 MHz	0,00666	0,00853	0,00128
1 GHz	0,00211	0,0027	0,000406
10 GHz	0,000666	0,000853	0,000128

Als Näherungsformeln des Widerstandes bei ausgeprägtem Skin-Effekt können verwendet werden:

- für runde Leiter: $R = \dfrac{l}{\kappa \cdot d \cdot \pi \cdot \delta}$
- für eckige Leiter: $R = \dfrac{l}{\kappa \cdot 2 \cdot (b + d) \cdot \delta}$

12.3.4 Magnetfeldstärke

Wie die Darstellung in Abs. 12.2 zeigt, eilt die elektrische Feldstärke $\underline{E_y(0)}$ an der Oberfläche gegenüber allen anderen Feldstärken im Leiterinneren vor. Dies muss wegen $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ natürlich auch für die Stromdichten $\underline{J_y}$ gelten.

Der Gesamtstrom $\underline{I}$ ergibt sich aus der Integration aller Stromdichten über die Fläche. Damit muss der Gesamtstrom $\underline{I}$ der Stromdichte an der Oberfläche $\underline{J_y(0)}$ nacheilen. Nachdem die Spannung $\underline{U}$ an der Oberfläche gemessen wird, und sie sich aus der Feldstärke $\underline{E_y(0)}$ an der Oberfläche ergibt, muss die Spannung $\underline{U}$ auch dem Strom $\underline{I}$ vorauseilen. Der Phasenwinkel kann nun wieder auf zwei Wegen ermittelt werden.

Setzt man in $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ die Beziehung $\underline{Z} = R + jX_i$ nach 12.3.1 ein, wobei im Falle eines ausgeprägten Skin-Effektes $R = X_i$ gilt, so folgt daraus, dass die Spannung $\underline{U}$ dem Strom $\underline{I}$ gerade um 45° vorauseilt. Dieser Phasenwinkel muss dann auch für die magnetische Feldstärke $\underline{H_z(0)}$ an der Oberfläche gelten, da diese ja den Gesamtstrom umschließt (Durchflutungssatz). Folglich muss die magnetische Feldstärke $\underline{H_z(0)}$ der elektrischen $\underline{E_y(0)}$ an der Oberfläche um den Winkel 45° nacheilen.

Dieser Zusammenhang kann auch aus den in 12.1 dargestellten Grundgleichungen gewonnen werden. Aus

$$\frac{d\underline{E}_y(x)}{dx} = -j\omega \cdot \mu_0\mu_r \cdot \underline{H}_z(x) \qquad \text{mit} \qquad \underline{E}_y(x) = \underline{E}_y(0) \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} \quad \underline{H}_z(x) = \underline{H}_z(0) \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x}$$

folgt: $-\underline{\gamma} \cdot \underline{E}_y(0) \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} = -j\omega \cdot \mu_0\mu_r \cdot \underline{H}_z(0) \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x}$ und $\underline{H}_z(0) = \dfrac{\underline{\gamma}}{j\omega \cdot \mu_0\mu_r} \cdot \underline{E}_y(0)$.

Mit der Größe $\underline{\gamma} = \sqrt{\omega \cdot \mu_0\mu_r \cdot \kappa} \cdot e^{j\pi/4}$ nach 12.1 folgt:

$$\underline{H}_z(0) = \frac{\sqrt{\omega \cdot \mu_0\mu_r \cdot \kappa} \cdot e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/2} \cdot \omega \cdot \mu_0\mu_r} \cdot \underline{E}_y(0) = \sqrt{\frac{\kappa}{\omega \cdot \mu_0\mu_r}} \cdot e^{-j\pi/4} \cdot \underline{E}_y(0).$$